

Relation entre l'indice VIX et la volatilité implicite des options sur le S&P 500

Travail de Bachelor réalisé en vue de l'obtention du Bachelor HES

par :

Nicolas PREVIDOLI

Conseiller au travail de Bachelor :

Robert SEILER

Genève, le 14 août 2015

Haute École de Gestion de Genève (HEG-GE)

Filière Economie d'Entreprise, orientation Banque & Finance

Déclaration

Ce travail de Bachelor est réalisé dans le cadre de l'examen final de la Haute école de gestion de Genève, en vue de l'obtention du titre de Bachelor of Science en Economie d'Entreprise, orientation Banque & Finance.

L'étudiant a envoyé ce document par email à l'adresse d'analyse remise par son conseiller au travail de Bachelor pour analyse par le logiciel de détection de plagiat URKUND. <http://www.orkund.com/fr/student/392-orkund-faq>

L'étudiant accepte, le cas échéant, la clause de confidentialité. L'utilisation des conclusions et recommandations formulées dans le travail de Bachelor, sans préjuger de leur valeur, n'engage ni la responsabilité de l'auteur, ni celle du conseiller au travail de Bachelor, du juré et de la HEG.

« J'atteste avoir réalisé seul le présent travail, sans avoir utilisé des sources autres que celles citées dans la bibliographie. »

Fait à Genève, le 14 août 2015

Nicolas Previdoli

Remerciements

Tout d'abord, je souhaite exprimer ma gratitude envers Monsieur Bruno Cheval pour sa confiance, ses précieuses explications ainsi que sa patience. Je suis également reconnaissant envers le professeur Robert Seiler pour la supervision de ce travail, mais surtout pour ses cours de finance que j'ai énormément apprécié.

Je tiens à remercier vivement ma famille, mes amis et mes camarades qui m'ont soutenu tout au long de ce travail.

Je remercie particulièrement Claire Zakher pour la correction de ce document.

Pour finir, je souhaite remercier sincèrement Quentin Vaucher et Lorenzo Buratti pour leurs précieuses remarques.

Résumé

L'objectif de ce travail est d'apporter une première analyse et d'éclaircir la relation entre l'indice VIX et la volatilité implicite des options sur le S&P500. Etant donné que les deux puisent l'information de la même source, c'est-à-dire le prix des options, il est facile de croire à une corrélation presque parfaite. Or, le calcul et la composition de l'indice VIX l'expose à des facteurs supplémentaires, auxquels la volatilité implicite (B&S) n'est pas sensible.

Notre analyse nous montre que ces facteurs propres à l'indice, qui sont l'écart inter-strike et l'éloignement des strikes extrêmes, ont un impact non négligeable, rendant par conséquent intéressante l'étude de la relation entre le VIX et la volatilité implicite.

Les résultats nous montrent que les volatilités implicites de strike proche des niveaux du sous-jacent, c'est-à-dire 100%, 97.5% et 95%, s'écartent de plus en plus du VIX au fur et à mesure que la volatilité augmente. A l'inverse, les strikes de 90% et 80% se rapprochent de l'indice. Ces deux strikes se voient également moins corrélés au VIX, on voit par exemple que le strike à 80% a une corrélation de 0.58 lorsque l'indice est inférieur à 30%. Selon nous ces résultats encouragent l'étude d'une stratégie d'arbitrage.

Nos résultats nous permettent également d'estimer quelles options sont susceptibles d'être similaire à l'indice, selon le niveau de volatilité. En effet, on voit qu'en moyenne le strike de 97.5% est le plus proche lorsque le VIX est en dessous de 24%, ensuite l'option de 95% est la plus proche jusqu'à un niveau de 46.5%, puis le strike de 90% jusqu'à un indice de 80% de volatilité. Ces informations nous ont permis de créer un « produit » essayant de répliquer le VIX sur la période étudiée. Notre expérience démontre que le produit possède un écart moyen de seulement 0.69 points de pourcent. Cependant, nous pensons que la mise en place d'un tel produit se comportant de manière similaire serait trop coûteux, notamment à cause des frais de transactions.

Table des matières

Déclaration	i
Remerciements	ii
Résumé.....	iii
Liste des tableaux et des figures	v
1. Introduction.....	1
2. La volatilité	2
2.1 La volatilité historique	3
2.2 La volatilité implicite	3
2.3 L'indice VIX	4
3. Asymétrie de la volatilité	5
3.1 Les effets du levier dans les marchés	5
3.2 Le feedback de la volatilité	6
3.3 Impact de l'information dans différentes situations de marché	6
4. Smile de la volatilité implicite.....	7
5. Construction de l'indice VIX.....	9
6. La différence entre le VIX et la volatilité implicite de B&S.....	11
7. Données et méthodologie.....	12
7.1 Données utilisées	12
7.2 L'analyse des facteurs influençant le VIX.....	13
7.3 Calcul des écarts absolus moyens	14
7.4 Performance des volatilités	15
8. Analyse	16
8.1 Facteurs influençant l'indice VIX	16
8.1.1 L'éloignement des strikes extrêmes	16
8.1.2 L'écart moyen entre strike (ΔK).....	17
8.1.3 La variation du prix des options	17
8.2 Relation entre l'indice VIX et la volatilité implicite	18
8.2.1 Observations générales	18
8.2.1.1 VIX inférieur à 30%.....	18
8.2.1.2 VIX supérieur à 30%.....	19
8.2.1.3 Les volatilités en général	21
8.2.2 Analyse des écarts moyens	22
8.3 L'option ayant la volatilité implicite la plus proche du VIX selon son niveau ...	25
9. Conclusion	26
Bibliographie.....	27
Annexe 1 : Chaînes d'options du VIX	28
Annexe 2 : Ecart absolu moyen (intervalle 0.5%)	30
Annexe 3 : Ecart absolu moyen (intervalle 5%)	33

Liste des tableaux

Tableau 1 : VIX – exclusion des options de Bid zéro	9
Tableau 2 : Extrait – Données utilisées pour le calcul des écarts	14
Tableau 3 : Extrait – Volatilités implicites moyennes et écarts moyens	14
Tableau 4 : Extrait – Ecart absolu moyen par intervalle de 5%	15
Tableau 5 : Comparaison du portefeuille d'options	17
Tableau 6 : Analyse de l'effet de l'écart entre strike	17
Tableau 7 : Analyse de l'effet du prix.....	17
Tableau 8 : Paramètres des volatilités ($VIX < 30\%$)	19
Tableau 9 : Paramètres des volatilités ($VIX > 30\%$)	20
Tableau 10 : Paramètres des volatilités en général	21
Tableau 11 : Evolution des écarts en pourcentage	24
Tableau 12 : Performance journalière moyenne	24
Tableau 13 : Paramètres du portefeuille de volatilité optimale	25

Liste des figures

Figure 1 : Asymétrie entre le prix et la volatilité	5
Figure 2 : Smile de la volatilité, S&P500 - le 17.07.15	7
Figure 3 : Distribution implicite et log-normale pour les options sur action	8
Figure 4 : Indice VIX et volatilités implicites entre 2014-2015	18
Figure 5 : Indice VIX et volatilités implicites durant l'année 2008.....	19
Figure 6 : Distribution du VIX (06-15).....	21
Figure 7 : Ecart absolu moyen – VIX inférieur à 30%	22
Figure 8 : Ecart absolu moyen – VIX supérieur à 30%	23

1. Introduction

« There are some risks we choose to take because the benefits from taking them exceed the possible costs. » Engle, 2003.

Comme le dit l'économiste Robert Engle, tant dans notre vie que dans la finance, nous prenons des risques si nous estimons qu'ils en valent la peine.

Sur les marchés, le risque est associé à la variance de la valeur d'un actif qui est mesurée par la volatilité. C'est un aspect primordial de la finance car c'est une information permettant à l'investisseur d'optimiser ses gains par rapport au risque qu'il est d'accord d'accepter. Cependant, le risque réel se trouve dans la volatilité future, c'est pourquoi les investisseurs recherchent des moyens d'estimer cette valeur.

Une des réponses à ce problème, le modèle de Black & Scholes, est utilisé afin de déduire du prix des options la volatilité implicite. Une deuxième alternative, l'indice VIX, a été apportée par le CBOE dans les années 90. Cet indice, de manière similaire au modèle de B&S, déduit la volatilité implicite à travers les prix d'un ensemble d'options sur le S&P500. Fort de son succès, le CBOE émet depuis 2004 des contrats *futures* sur cet indice, rendant la volatilité un produit directement négociable.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la relation entre l'indice VIX et la volatilité implicite des options du S&P500, deux formes de volatilités qui prennent leur source du prix des options, mais dont l'approche est fondamentalement différente.

Cette analyse se veut être une première approche destinée à des professionnels qui pourraient trouver dans ses résultats une opportunité de construire des stratégies d'investissements spéculatives.

Le travail commence par une explication succincte de la volatilité ainsi que des concepts clés. Nous prenons également le temps d'expliquer d'une façon simplifiée la manière dont l'indice VIX est calculé.

Ensuite, nous analysons comment le VIX est influencé par les différents facteurs qui le composent afin de comprendre plus précisément de quelle manière il se différencie de la volatilité implicite de B&S.

Après, nous analysons en détail la relation entre le VIX et les volatilités implicites, notamment en observant l'écart entre eux, mais également différents paramètres statistiques.

Pour finir, nous testons nos résultats afin de composer un produit fictif qui nous permet de répliquer l'indice VIX avec des écarts minimaux.

2. La volatilité

La volatilité est l'ampleur dans laquelle le prix d'un actif fluctue. Engle (2003) explique que de manière basique la volatilité est simplement due à l'arrivée de nouvelles informations. En effet, la valeur d'un actif financier dépend du gain futur que les investisseurs espèrent recevoir de par sa détention. Or, ce revenu est incertain car il dépend de la situation économique future de l'entreprise et de son environnement qui sont inconnus au moment de l'investissement. Afin d'estimer un prix équitable, les investisseurs établissent des prévisions basées sur les informations à leur disposition en temps présent. La diffusion de nouvelles informations par la suite implique une révision des prévisions, puis une réévaluation de la valeur de l'actif, expliquant ainsi la fluctuation de sa cote.

La volatilité est une mesure importante car elle renseigne sur l'incertitude ou le risque que peut comporter l'investissement. Par exemple, une volatilité élevée signifie que le prix de l'actif peut potentiellement évoluer de manière importante en un court laps de temps, tant à la hausse qu'à la baisse (investopedia.com). La disposition d'un investisseur à accepter une volatilité élevée dépendra de son profil et du rendement souhaité.

Il existe deux types de volatilités distinctes: la *volatilité historique* et la *volatilité implicite*.

2.1 La volatilité historique

La *volatilité historique* mesure les mouvements passés de l'actif. Elle est calculée en faisant l'écart-type d'un nombre donné de variations journalières précédentes du cours de bourse de l'actif. C'est donc une méthode dite *ex post*. Afin de calculer l'écart-type, la performance journalière est calculée telle que $x_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$ où P_t est le prix de clôture en jour t .

Ensuite, une moyenne des performances journalières est faite comme suit $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$

Pour finir, la volatilité historique journalière est calculée $HV_{\text{journ.}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{X})^2}$

Conventionnellement la volatilité est exprimée en valeur annuelle, c'est pourquoi la donnée est ensuite multipliée par la racine du nombre de jours dans une année.

$$HV = HV_{\text{journ.}} \times \sqrt{252}. \quad (\text{IVolatility.com})$$

2.2 La volatilité implicite

La *volatilité implicite* est la volatilité future attendue par le marché pour l'actif en question. Elle se mesure à travers le prix du marché d'une *option* sur le sous-jacent en utilisant un modèle d'évaluation du prix théorique d'une option, tel que par exemple le modèle de Black-Scholes. En effet, afin de calculer le prix d'une option, un modèle nécessite :

- la date d'expiration,
- le prix d'exercice
- le prix du sous-jacent,
- le dividende si existant,
- le taux d'intérêt répandu sur le marché,
- la volatilité future.

La volatilité est la seule composante basée sur les prévisions de l'investisseur. Or, puisque le prix du marché de l'option est connu, il est possible de calculer la volatilité future estimée par le consensus du marché en transformant le modèle en une équation dont l'inconnue est la volatilité.

Par conséquent, lorsque le prix de l'option change et que les autres facteurs restent inchangés, cela est dû à un changement de la volatilité implicite. Cette dernière est généralement comparée à la volatilité historique afin de déterminer si une option est chère ou bon marché. (IVolatility.com)

2.3 L'indice VIX

Etant donné l'importance de la volatilité dans la gestion des risques, le Chicago Board Options Exchange (CBOE) a conçu en 1993 *l'Indice de Volatilité (VIX)* qui mesurait la volatilité implicite 30-jours des options à la monnaie de l'indice S&P 100 (OEX).

En 2003, le calcul du VIX fut amélioré conjointement par le CBOE et la banque Goldman Sachs. Désormais, le VIX se base sur les options de l'indice S&P 500 (SPX), vrai reflet de la bourse américaine.

Un document officiel du CBOE (CBOE, 2014) explique ce nouveau calcul :

« Le VIX (...) mesure la volatilité implicite en réalisant une moyenne des prix pondérés d'options puts et calls sur le S&P500, d'une variété de prix d'exercice. »

Comme expliqué précédemment, il est possible d'extrapoler la volatilité implicite à l'aide d'un modèle d'évaluation du prix d'une option, or, l'indice VIX utilise une méthode différente en

« (...) répliquant une exposition à la volatilité avec un portefeuille d'options sur le S&P500 (...) »

Ce point sera traité plus précisément ultérieurement.

Indicateur de l'incertitude des investisseurs, l'indice de volatilité est fréquemment mentionné comme « l'indice de la peur » par la presse spécialisée.

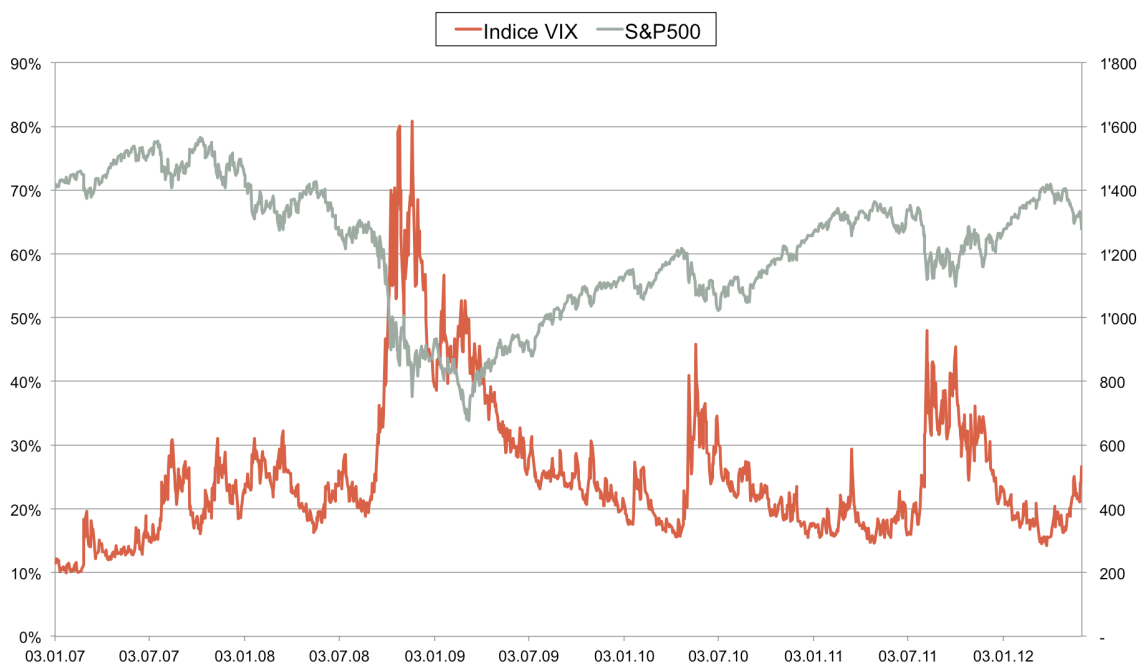
(CBOE, 2014)

3. Asymétrie de la volatilité

Il existe une relation asymétrique entre la volatilité et le marché des actions. En effet, on constate que la volatilité est plus fréquemment élevée durant un marché baissier que durant un marché haussier. La Figure 1 montre cette réalité entre l'indice VIX et le S&P500. Il n'existe aucun consensus jusqu'à ce jour pour expliquer ce phénomène, mais les causes suivantes ont été attribuées à ce phénomène :

- les effets du levier dans les marchés ;
- le feedback de la volatilité ;
- l'impact de l'information dans différentes situations de marché.

Figure 1 : Asymétrie entre le prix et la volatilité



3.1 Les effets du levier dans les marchés

Selon Black (1976), lorsque le prix d'une action diminue, le levier financier de l'entreprise devient mécaniquement plus important puisque la valeur relative de sa dette augmente par rapport à son capital. De ce fait, l'entreprise devient plus risquée, impliquant une plus grande volatilité de son prix. Aït-Sahalia Yacine (2013) explique que cet effet seul ne peut pas être attribué à ce phénomène étant donné l'ampleur de celui-ci. D'autres recherches argumentent au contraire qu'il n'y a pas de lien apparent entre l'effet de levier et l'asymétrie de la volatilité (Figlewski (2000), Jasmina Hasanhodzic (2011)).

3.2 Le feedback de la volatilité

Lorsqu'un investisseur achète une action, il espère un certain rendement. Or ce dernier dépend en partie du risque que comporte cet investissement. Si par exemple l'entreprise est en situation difficile, le risque d'une faillite est élevé et l'investisseur souhaitera être compensé par un supplément de rendement, dit « prime de risque ». Pour cela, l'acheteur va offrir un prix plus faible reflétant son rendement espéré.

Selon French (1987), il y a de bonnes évidences qu'il y ait une relation positive entre la prime de risque espérée et le niveau de volatilité attendu dans le futur. En d'autre terme, une augmentation anticipée de la volatilité future (ou volatilité implicite) demande un taux de rendement plus élevé pour l'actif, qui peut se concrétiser uniquement par une baisse de son prix. Ce phénomène est décrit comme le feedback de la volatilité.

3.3 Impact de l'information dans différentes situations de marché

Selon Engle (2003b) l'importance de l'impact sur le prix d'une action d'un événement ou d'une nouvelle information dépend des conditions économiques de l'entreprise et de l'économie.

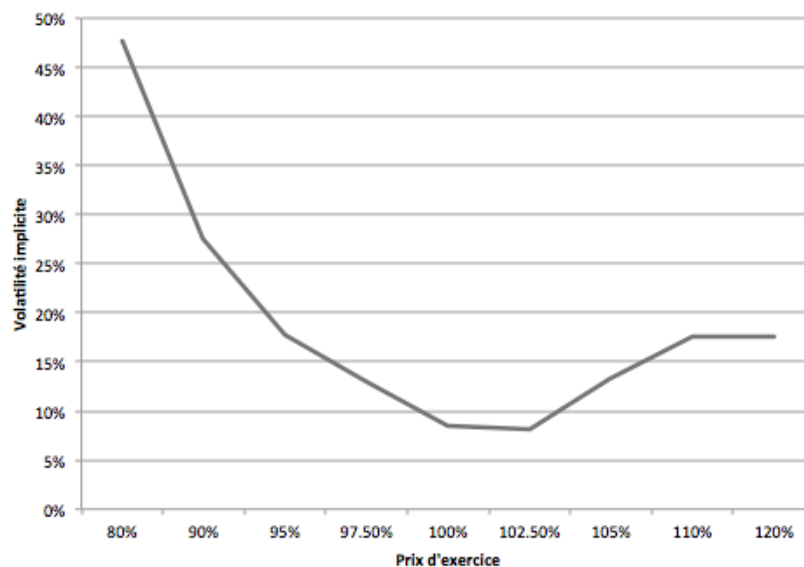
L'économiste explique qu'une nouvelle positive à propos d'une entreprise, qui va ultimement augmenter ses résultats et ses dividendes (telle qu'une invention), aura un effet plus important si l'entreprise est au bord de la faillite, que dans le cas contraire. De la même manière, l'impact sera plus important dans une économie en récession, dans laquelle la mise en place d'une telle invention est facilitée par des intérêts bas et un surplus de main-d'œuvre.

Robert Engle conclut, par conséquent, qu'il n'est pas surprenant de trouver une volatilité plus importante durant un ralentissement économique. Il ajoute également que l'intensité du flux de l'actualité est en général plus importante durant les détresses économiques et les guerres.

4. Smile de la volatilité implicite

Intuitivement, il serait logique d'imaginer que la volatilité implicite des options d'un même sous-jacent doit être similaire pour chaque prix d'exercice. Or, en observant la Figure 2, on constate que tel n'est pas le cas. La VI est effectivement plus importante pour les prix d'exercice plus faible.

Figure 2 : Smile de la volatilité, S&P500 - le 17.07.15



(Illustration originale, données de Bloomberg)

Ce phénomène nommé « smile » (sourire en français) n'est apparu qu'après le crash du 19 octobre 1987, appelé le « lundi noir » (Rubinstein, 1994). En effet, avant ce jour on remarquait une volatilité implicite quasi égale pour chaque prix d'exercice. Avant ce jour, les traders assumaient les mêmes hypothèses que celles émises par le modèle de Black & Scholes, qui sont :

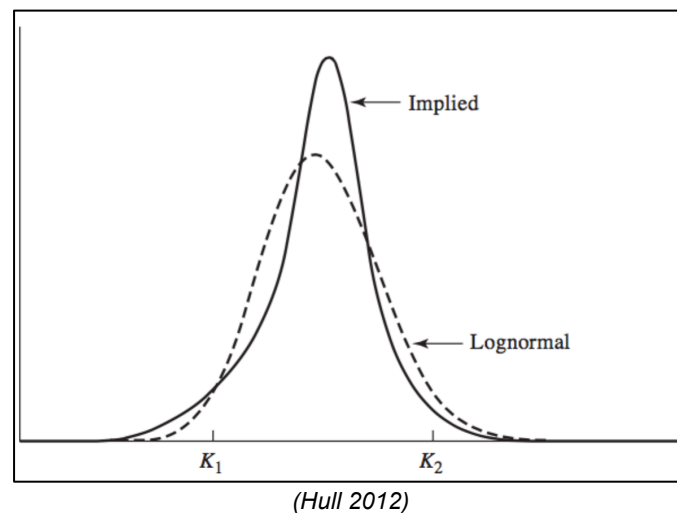
- les variations du prix d'un sous-jacent suivent une distribution log-normale,
- une volatilité implicite constante pour chaque prix d'exercice.

Or, historiquement les variations des marchés montrent que la probabilité d'occurrence de valeurs extrêmes négatives est plus importante que celle assumée par une distribution normale. Selon Mark Rubinstein, le « lundi noir » aurait donc rendu les traders attentifs à cet aspect et plus méfiants qu'un crash similaire se produise. Avec cette nouvelle information les options de faible strike, ayant une probabilité plus élevée d'être exercées relativement à une distribution log-normale assumée auparavant, doivent de facto voir leur valeur augmenter.

Cette augmentation de valeur des options de faible strike se traduit dans le modèle de Black & Scholes, si toutes choses étant égales, par une augmentation de leur volatilité implicite. Le smile de volatilité est donc produit à cause de la défaillance du modèle B&S en assumant une distribution log-normale. Malgré que le modèle produise une volatilité implicite biaisée, les investisseurs continuent de l'utiliser car c'est un moyen simple d'évaluer la cherté d'une option.

Hull (2012) confronte graphiquement (Figure 3) la distribution log-normale et la distribution implicitement assumée par le *smile de volatilité*.

Figure 3 : Distribution implicite et log-normale pour les options sur action



On note que la distribution implicite a un *skew* négatif, supposant une plus grande probabilité d'événements extrêmes en dessous de la moyenne. Ceci explique pourquoi la valeur des options de faible strike se voit être plus élevée qu'en situation d'une distribution log-normale.

On remarque également que la courbe est dite *leptokurtic*, supposant un plus grand nombre de valeurs centrées autour de la moyenne.

5. Construction de l'indice VIX

Comme nous l'avons vu, l'indice VIX représente la volatilité attendue par les investisseurs pour les 30 prochains jours sur l'indice S&P500. Afin d'estimer cette valeur, l'indice dérive la volatilité implicite du prix d'un ensemble de

- contrats **put** dont le prix d'exercice est inférieur au contrat à la monnaie (hors de la monnaie),
- contrats **call** dont le prix d'exercice est supérieur au contrat à la monnaie (hors de la monnaie).

De plus, il écarte tous les contrats dont le *prix Bid* est nul, ainsi que les options qui précèdent deux options consécutives de Bid zéro (Tableau 1).

Tableau 1 : VIX – exclusion des options de Bid zéro

Put Strike	Bid	Ask	Include?	Call Strike	Bid	Ask	Include?
1345	0	0.15	<i>Not considered following two zero bids</i>
1350	0.05	0.15		2095	0.05	0.35	Yes
1355	0.05	0.35		2100	0.05	0.15	Yes
1360	0	0.35	No	2120	0	0.15	No
1365	0	0.35	No	2125	0.05	0.15	Yes
1370	0.05	0.35	Yes	2150	0	0.1	No
1375	0.1	0.15	Yes	2175	0	0.05	No
1380	0.1	0.2	Yes	2200	0	0.05	<i>Not considered following two zero bids</i>
.	.	.	.	2225	0.05	0.1	
				2250	0	0.05	
				.	.	.	

(CBOE, 2014)

Lorsque la volatilité augmente, les contrats de strike éloigné deviennent intéressants car la probabilité que le sous-jacent atteigne cette valeur est plus importante. Ainsi, plus la volatilité implicite est grande et plus le nombre d'options que l'indice englobe est important.

Afin de fournir une estimation de la volatilité dans les 30 prochaines jours, le VIX est composé d'options d'échéance proche (near-term) et d'échéance suivante (next-term) avec plus de 23 jours et moins de 37 jours avant expiration. Ceci inclut des options SPX standards qui expirent au 3^{ème} vendredi chaque mois et des options « weekly » SPX qui expirent chaque vendredi. Toutes les semaines les options utilisées dans l'indice sont « roulées » à de nouvelles maturités.

(CBOE, 2014)

Le CBOE fournit l'exemple suivant (CBOE, 2014) :

« For example, on the second Tuesday in October, the VIX index would be calculated using SPX options expiring 24 days later (i.e., “near-term”) and 31 days later (i.e., “next-term”). On the following day, the SPX options that expire in 30 calendar days would become the “near-term” options and SPX options that expire in 37 calendar days would be the “next-term” options. »

Expliqué simplement, l'indice parvient à extrapoler la volatilité implicite par la création d'un portefeuille d'options ayant une exposition totale à la variance et étant indépendant au sous-jacent. Ainsi, la valeur du portefeuille est strictement égale à la volatilité attendue du marché.

Pour se faire, il est nécessaire de pondérer les options sélectionnées par l'inverse de leur prix d'exercice au carré et de les multiplier par l'intervalle autour de leur prix d'exercice. Les conditions de non-arbitrage impliquent que le prix forward d'un portefeuille similaire d'options soit égal au prix forward de la variance.

Une simplification de la formule de la variance peut s'écrire ainsi :

$$Variance = P_{portefeuille} = 2 \cdot e^{rt} \left[\sum \left(\frac{\Delta K}{K^2} \cdot Put_K \right) + \sum \left(\frac{\Delta K}{K^2} \cdot Call_K \right) \right]$$

L'indice VIX se calcule ensuite par la racine de la variance, multiplié par 100 :

$$VIX = 100 \sqrt{\left(\frac{365}{30} \right) * (\mathcal{W} \cdot P_1 + (1 - \mathcal{W}) \cdot P_2)}$$

Où

\mathcal{W} : pondération en fonction de l'échéance

P_n : prix forward du portefeuille d'option d'échéance n

(CFE.CBOE.com)

6. La différence entre le VIX et la volatilité implicite de B&S

L'indice du CBOE ainsi que la volatilité de B&S tentent tous deux d'estimer la volatilité que les investisseurs attendent implicitement dans le futur, à travers les prix qui reflètent leur comportement. Bien que ces deux formes de volatilités proviennent de la même source, c'est à dire le prix du marché des options, une différence fondamentale subsiste ; la volatilité de B&S est limitée par son modèle.

Comme nous l'avons vu, Black & Scholes assume une distribution log-normale des cours de bourse qui n'est pas réaliste en l'état des choses. Les acteurs du marché, qui assument une distribution d'un *skew négatif* et *leptokurtic*, donnent plus de valeur aux options « hors de la monnaie » que ne le fait le modèle. Par conséquent, le modèle biaise les volatilités des strikes éloignés et provoquent le *smile de volatilité*. La volatilité implicite de B&S reste néanmoins un outil vastement utilisé permettant de juger et comparer la valeur des options.

Le VIX quant à lui est libre de tout modèle et ne fait que répliquer un portefeuille d'options sensibles uniquement à la variance. Il est donc présumé être une meilleure représentation du sentiment des acteurs.

7. Données et méthodologie

7.1 Données utilisées

Nous avons récolté les données à travers la plateforme électronique de Bloomberg et l'analyse est faite en utilisant le logiciel Excel de Microsoft.

Afin d'avoir un jeu de données suffisamment important ainsi que diverses situations de marché, nous avons choisi de considérer un intervalle d'environ 9 ans, entre le 03.01.2006 et le 16.03.2015.

Nous avons récolté les valeurs de clôture quotidiennes des informations suivantes :

- S&P 500 (SPX)
- Indice VIX
- La Volatilité implicite (B&S) des options sur le SPX, d'une maturité à 30 jours, pour chaque prix d'exercice ($k^{\%}$) : **100%, 97.5%, 95%, 90% et 80%.**

Le dernier point correspond à la volatilité implicite, en jour t , de l'option effectivement la plus proche d'une maturité de 30 jours et la plus proche du strike $k^{\%}$, relativement au prix du sous-jacent en jour t . Elle est calculée avec le modèle de Black & Scholes.

7.2 L'analyse des facteurs influençant le VIX

Afin d'analyser l'indice VIX et de quelle manière sa valeur évolue, nous avons procédé de deux manières. Premièrement, nous avons répliqué dans Excel l'exemple de calcul du VIX donné par le CBOE dans son « white paper » (CBOE, 2009) afin de manipuler les données et constater l'impact sur la valeur de l'indice. Deuxièmement, nous avons comparé la composition du portefeuille d'options incluses dans le VIX, durant deux niveaux de volatilité très différents.

Pour ce dernier point, nous avons été limité par la disponibilité des données historiques des options. En effet, le Help Desk de Bloomberg nous a informé qu'il était actuellement possible de consulter qu'une période limitée des prix historiques. Etant donné la volatilité relativement stable au moment de cette étude, cet historique n'était pas suffisant pour une comparaison satisfaisante. Afin de contourner ce problème, nous avons utilisé les données fournies dans le « white paper » (2009). Dans ce papier le CBOE fournit l'entier de la chaîne d'options utilisées dans l'exemple du calcul de l'indice. Malheureusement, le CBOE ne renseigne pas la date de ces données, mais nous partons du principe que l'organisation a utilisé de véritables informations. Nous estimons que les données proviennent de la période 10-12.2008¹.

Nous avons donc comparé

- la chaîne d'options d'échéance proche (near-term) utilisées dans l'exemple du CBOE, présentant un indice VIX de 61.22%,
avec
- une chaîne d'options d'expiration au 21.08.2015 arrêtées à la date du 04.08.15 (17 jours avant expiration). Ce jour le VIX était de 13%.

*Les données des deux chaînes d'options utilisées se trouvent en **annexe 1**.*

La colonne « Contribution by strike » est calculée à l'aide de la formule (1) ci-dessous :

$$\sigma^2_I = \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT_i} Q(K_i) \quad (\text{CBOE, 2014}) \quad (1)$$

La valeur σ_1^2 correspond à la contribution de variance par option, avant pondération par l'échéance.

Dans notre analyse nous négligeons T .

¹ D'après nos recherches, les données fournies par le CBOE correspondent à la période entre octobre et décembre 2008. Cela coïncide avec la date de publication (2009), le niveau du S&P500 et du VIX.

7.3 Calcul des écarts absolus moyens

Pour l'analyse de la relation, nous calculons pour chaque jour l'écart absolu entre le VIX et la volatilité implicite de chaque prix d'exercice (2). Nous prenons des valeurs absolues afin d'éviter qu'elles s'annulent entre elles lors des calculs de moyennes.

$$|Ecart_t^k| = \sqrt{(VIX_t - IV_t^k)^2} \quad (2)$$

Nous ordonnons ensuite les données journalières en fonction du niveau de l'indice VIX de manière croissante, comme présenté dans le Tableau 2. Ceci est fait dans le but d'analyser la relation lorsque le VIX s'accroît.

Pour finir, afin de réduire le bruit produit par la volatilité des données, nous les regroupons dans des intervalles de 0.50% autour de l'indice VIX, en faisant une moyenne des écarts journaliers. Un extrait est exposé dans le Tableau 3.

Ainsi, par exemple, nous pouvons voir que lorsque l'indice VIX est aux alentours de 10%, la volatilité implicite moyenne de l'option d'un strike 100% est de 8.93% et l'écart moyen entre les deux est de 1.17 point de pourcent. Les cellules bleues mettent en avant le strike de volatilité la plus proche du VIX.

(Résultats disponibles en annexe 2)

Tableau 2 : Extrait – Données utilisées pour le calcul des écarts



Date	VIX	VIX arrondi	Volatilité implicite (VI) par strike					Écarts (VIX-VI) absolus en points de %				
			100%	97.50%	95%	90%	80%	100%	97.50%	95%	90%	80%
24.01.07	9.89%	10.00%	8.64%	10.76%	13.01%	18.14%	28.89%	1.25	0.87	3.12	8.25	19.00
21.11.06	9.90%	10.00%	8.71%	10.27%	12.34%	17.36%	25.27%	1.19	0.37	2.44	7.46	15.37
20.11.06	9.97%	10.00%	8.84%	10.43%	12.52%	17.67%	25.89%	1.13	0.46	2.55	7.70	15.92
14.12.06	9.97%	10.00%	8.90%	10.99%	13.31%	17.80%	29.60%	1.07	1.02	3.34	7.83	19.63
16.02.07	10.02%	10.00%	8.71%	10.61%	12.89%	17.90%	25.38%	1.31	0.59	2.87	7.88	15.36
17.11.06	10.05%	10.00%	8.76%	10.39%	12.45%	17.71%	25.97%	1.29	0.34	2.40	7.66	15.92
15.12.06	10.05%	10.00%	9.08%	10.89%	13.12%	18.59%	29.76%	0.97	0.84	3.07	8.54	19.71

Tableau 3 : Extrait – Volatilités implicites moyennes et écarts moyens

Nb. obs.	Interval (VIX) x ; y]		VIX		Volatilité implicite (VI) moyenne par k					Écarts absolus moyens (en points de %)				
			moyen	arrondi	100%	97.50%	95%	90%	80%	100%	97.50%	95%	90%	80%
17	9.75%	10.25%	10.10%	10.00%	8.93%	10.78%	12.93%	17.91%	25.77%	1.17	0.69	2.84	7.81	15.68
30	10.25%	10.75%	10.53%	10.50%	9.21%	11.17%	13.35%	18.31%	26.65%	1.31	0.64	2.83	7.79	16.13
49	10.75%	11.25%	11.02%	11.00%	9.65%	11.47%	13.56%	18.34%	26.07%	1.37	0.46	2.54	7.31	15.05
68	11.25%	11.75%	11.51%	11.50%	9.92%	11.89%	14.09%	19.08%	27.49%	1.59	0.39	2.58	7.57	15.97
82	11.75%	12.25%	12.00%	12.00%	10.14%	12.22%	14.50%	19.54%	28.59%	1.86	0.29	2.50	7.54	16.59
92	12.25%	12.75%	12.49%	12.50%	10.56%	12.59%	14.85%	19.44%	25.14%	1.93	0.25	2.36	6.95	12.65
101	12.75%	13.25%	12.99%	13.00%	11.01%	13.05%	15.32%	19.75%	24.73%	1.98	0.35	2.33	6.76	11.74

Nous avons également fait ce travail avec des intervalles de 5% (Tableau 4). De plus, nous avons calculé pour chaque intervalle :

- la moyenne des écarts
- la médiane
- l'écart maximum et minimum
- l'écart-type

(Résultats disponibles en annexe 3)

Tableau 4 : Extrait – Ecart absolu moyen par intervalle de 5%

VIX] x ; y]		Ecart absolu (en points de %)					Nb. obs.
		100%	97.50%	95%	90%	80%	
Moyenne	0-15%	1.92	0.37	2.36	6.89	12.66	733
	15-20%	2.54	0.66	1.64	5.99	9.26	668
	20-25%	2.66	0.91	1.15	5.06	8.76	424
	25-30%	3.05	1.29	0.92	4.54	8.91	200
	30-35%	4.17	2.25	0.70	4.03	8.17	101

7.4 Performance des volatilités

Afin d'analyser la « vitesse » du VIX, nous avons comparé les performances moyennes du VIX et des différentes volatilités. Pour se faire nous avons calculé leurs variations journalières avec la formule (3) ci-dessous.

$$Perf = \ln \left(\frac{V_t^i}{V_{t-1}^i} \right) \quad (3)$$

Nous avons ensuite calculé la moyenne des performances journalières pour chacune des données, en sélectionnant uniquement les jours où le VIX présentait une performance positive, puis de manière similaire en sélectionnant uniquement les jours où le VIX présentait une performance négative.

8. Analyse

8.1 Facteurs influençant l'indice VIX

Tout comme la volatilité implicite, l'indice VIX prend sa source du prix des options du S&P 500, mais il serait erroné de croire que seule la fluctuation des prix influe sur le VIX. En étudiant la manière dont l'indice de la peur est calculé, il est possible d'avoir un aperçu des facteurs pouvant avoir une influence sur sa valeur. Cependant, il est difficile d'avoir une idée concrète du réel impact, ce à quoi nous nous sommes intéressés.

Suite à notre analyse, nous avons retenu trois facteurs significatifs :

- L'éloignement des strikes extrêmes,
- L'écart entre strike,
- La variation du prix des options.

8.1.1 L'éloignement des strikes extrêmes

Lorsque la volatilité augmente les investisseurs ont de l'intérêt pour les options de plus en plus éloignées du strike à la monnaie. En effet, la probabilité que ces options soient exercées augmente et leur prix est relativement plus faible que pour leurs homologues proches du niveau du sous-jacent. Ainsi, le nombre d'options négociées de prix d'exercice différent augmente au fur et à mesure que la volatilité s'accroît. Ce phénomène est pris en compte dans l'indice VIX par le fait d'inclure toutes les options n'ayant pas un Bid price de zéro.

En observant les deux chaînes d'options, résumées dans le Tableau 5, on remarque justement que le nombre d'options considérées dans le VIX est beaucoup plus important lorsqu'il est élevé. Il passe de 92 à 136 options de strikes différents. Le strike le plus bas représente 43% du strike à la monnaie, contre 85%. Le strike le plus élevé est à 133% contre 106%.

La somme des variances (colonne « contribution by strike », Annexe 1) des 44 options supplémentaires contribue 21% de la variance totale (non pondérée) de la chaîne d'options. Si on supprime toutes les options supplémentaires du calcul du VIX (à l'aide du fichier Excel), l'indice diminue de 14.7 points de pourcent (61.2% à 46.5%).

Tableau 5 : Comparaison du portefeuille d'options

	05.08.15	10 - 12.2008
Indice VIX	13.00%	61.20%
Nombre d'options considérées	92	136
Strike le plus bas	85%	43%
Strike le plus haut	106%	133%
ΔK moyen	5.00	6.14
ΔK le plus élevé	5.00	25.00
Somme des variances	0.00027	0.00585
Variance moyenne	0.0000030	0.0000430

8.1.2 L'écart moyen entre strike (ΔK)

Dans la formule du VIX (1) on perçoit qu'il prend également en compte l'écart moyen entre chaque strike. En temps normal, lorsque la volatilité est basse, les écarts entre prix d'exercice sont de \$5 pour le S&P 500. Quand la volatilité est haute, on constate que cet écart a tendance à augmenter pour les options put proches d'un prix d'exercice de 80% et inférieures à 60% (Annexe 1). L'écart le plus important est de \$25.

Comme présenté dans le Tableau 6, si on augmente le Delta-K d'une option à \$25 sa contribution augmente de 400%.

Tableau 6 : Analyse de l'effet de l'écart entre strike

Strike	%	Put mid-quote price	ΔK	Contribution by strike (variance)
400	43%	0.125	5	0.0000039
400	43%	0.125	25	0.0000196

8.1.3 La variation du prix des options

Le prix des options est l'information qui contient le plus de renseignements quant à la volatilité implicite, il n'est donc sans surprise de voir que c'est le facteur qui influence le plus l'indice. En s'aidant du fichier Excel, on observe que pour une augmentation de 1112% du prix de l'option, sa contribution augmente dans les mêmes proportions (1112%).

Tableau 7 : Analyse de l'effet du prix

VIX	Strike	%	Put mid-quote price	ΔK	Contribution by strike (variance)
13.00%	1995	95%	1.65	5	0.0000021
13.00%	1995	95%	20	5	0.0000251

8.2 Relation entre l'indice VIX et la volatilité implicite

Nous allons maintenant comparer le comportement du VIX et de la volatilité implicite des options de prix d'exercice de 100%, 97.5%, 95%, 90% et 80%.

Dans un premier temps nous émettrons des observations générales, puis dans un deuxième temps nous parlerons en détail des résultats obtenus concernant les écarts moyens entre le VIX et chaque volatilité implicite en fonction du niveau de l'indice VIX.

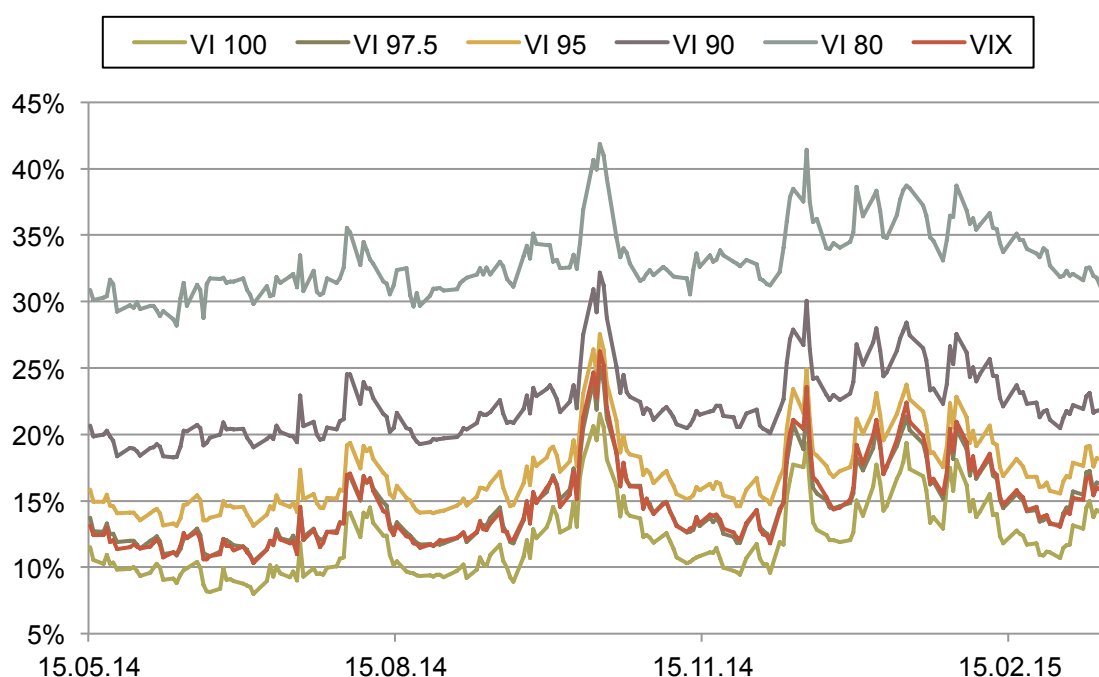
8.2.1 Observations générales

8.2.1.1 VIX inférieur à 30%

Lorsque l'indice VIX est inférieur à 30%, illustré par un exemple sur la Figure 4, nous voyons que VIX semble être très corrélé aux volatilités implicites. Cela est sans surprise étant donné que l'indice reflète le sentiment du marché à travers les prix des options, desquels les volatilités implicites sont également déduites. L'écart observable entre les différentes volatilités implicites provient, comme expliqué précédemment, du *smile de volatilité* causé par le modèle de Black&Scholes.

A ce niveau, l'indice VIX a une valeur supérieure à la volatilité implicite à la monnaie et est inférieur à la volatilité implicite de strike 95%, 90% et 80%. A peine visible, la volatilité du prix d'exercice de 97.5% semble répliquer l'indice avec un écart visiblement proche de zéro. La volatilité implicite 80% quant à elle se voit avoir l'écart le plus important avec l'indice.

Figure 4 : Indice VIX et volatilités implicites entre 2014-2015



En examinant quelques paramètres de ces variables, présentés dans le Tableau 8, on voit que le VIX a une valeur moyenne de 17.7%, très proche du strike 97.5% qui possède une volatilité implicite de 17.3%. On aperçoit également que la volatilité du strike 80% est la variable la plus volatile avec un écart type supérieur aux autres, et également la moins corrélée au VIX, avec un coefficient de seulement 0.59.

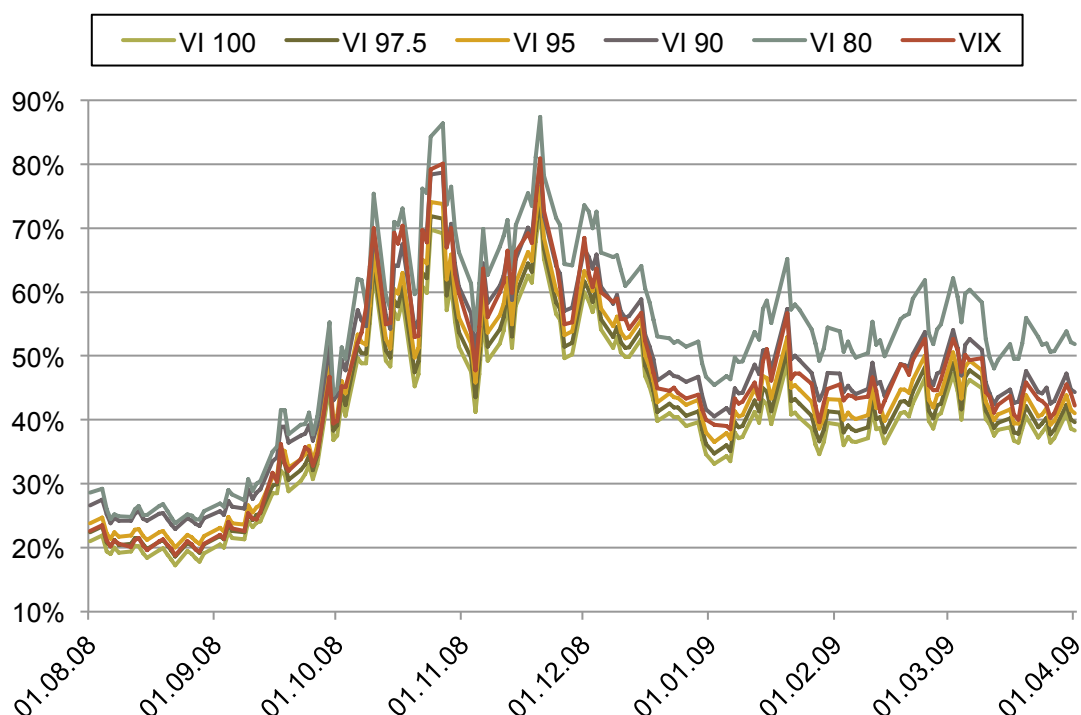
Tableau 8 : Paramètres des volatilités (VIX < 30%)

VIX < 30%	Volatilité historique (30 jours)	Indice VIX	Volatilité Implicite				
			100%	97.50%	95%	90%	80%
Moyenne	13.79%	17.73%	15.34%	17.31%	19.43%	23.72%	28.10%
Ecart moyen avec le VIX			-2.40%	-0.42%	1.69%	5.99%	10.36%
Médiane	13.09%	16.88%	14.35%	16.42%	18.62%	23.13%	28.62%
Ecart type	5.53%	4.91%	4.56%	4.46%	4.33%	4.13%	5.57%
Corrélation avec Vol hist.	-	0.7920	0.8107	0.8111	0.8045	0.7617	0.4924
Corrélation avec VIX	-	-	0.9872	0.9902	0.9906	0.9734	0.5874

8.2.1.2 VIX supérieur à 30%

Lorsque le VIX se trouve supérieur à 30%, notamment durant la crise de 2008 visible sur la Figure 5, la situation change amplement. Poussé par l'incertitude économique et la forte demande d'une protection par les investisseurs, les prix des options augmentent drastiquement. Cet effet a pour conséquence un accroissement simultané de la volatilité implicite et de l'indice VIX.

Figure 5 : Indice VIX et volatilités implicites durant l'année 2008



L'incertitude se ressent fortement dans les variations frénétiques des volatilités. En étudiant les paramètres de ces variables, présentés dans le Tableau 9, on remarque en effet des écart-types deux fois plus important que précédemment.

Dans ces niveaux élevés, les écarts entre les valeurs ont évolués. Désormais, l'indice est en moyenne à 42.5% et se situe entre les volatilités implicites de strike 95% et 90%, non plus proche de celle de strike 97.5% comme vu précédemment à des niveaux plus faibles.

Les corrélations quant à elles ont également changé. Étonnamment, la corrélation du VIX envers la volatilité implicite de strike 80% s'est vue multipliée par 1.65. Les autres volatilités voient également leur corrélation augmenter mais de manière négligeable. L'augmentation importante de la corrélation entre le VIX et la volatilité implicite de strike 80% s'explique par l'accroissement d'intérêt pour les options put très éloignés du niveau du S&P 500, qui prennent un plus grand poids dans l'indice.

Comme nous l'avons vu dans l'analyse des facteurs du VIX, l'augmentation de l'intérêt pour les options hors de la monnaie se reflète dans l'indice VIX de trois manières. D'abord, simplement par l'augmentation du prix des options. Ensuite par l'accroissement du nombre de strikes négociés. Pour finir, par l'accroissement des écarts entre strikes.

Tableau 9 : Paramètres des volatilités (VIX > 30%)

VIX > 30%	Volatilité historique (30 jours)	Indice VIX	Volatilité Implicite				
			100%	97.50%	95%	90%	80%
Moyenne	42.78%	42.49%	37.37%	39.22%	41.15%	45.15%	50.18%
Ecart moyen avec le VIX			-5.11%	-3.26%	-1.34%	2.67%	7.70%
Médiane	37.78%	39.70%	34.93%	37.03%	39.23%	42.88%	47.76%
Ecart type	17.29%	11.21%	10.11%	10.05%	9.99%	9.91%	10.82%
Corrélation avec Vol hist.	-	0.8354	0.8383	0.8397	0.8396	0.8353	0.7985
Corrélation avec VIX	-	-	0.9884	0.9913	0.9926	0.9908	0.9789

8.2.1.3 Les volatilités en général

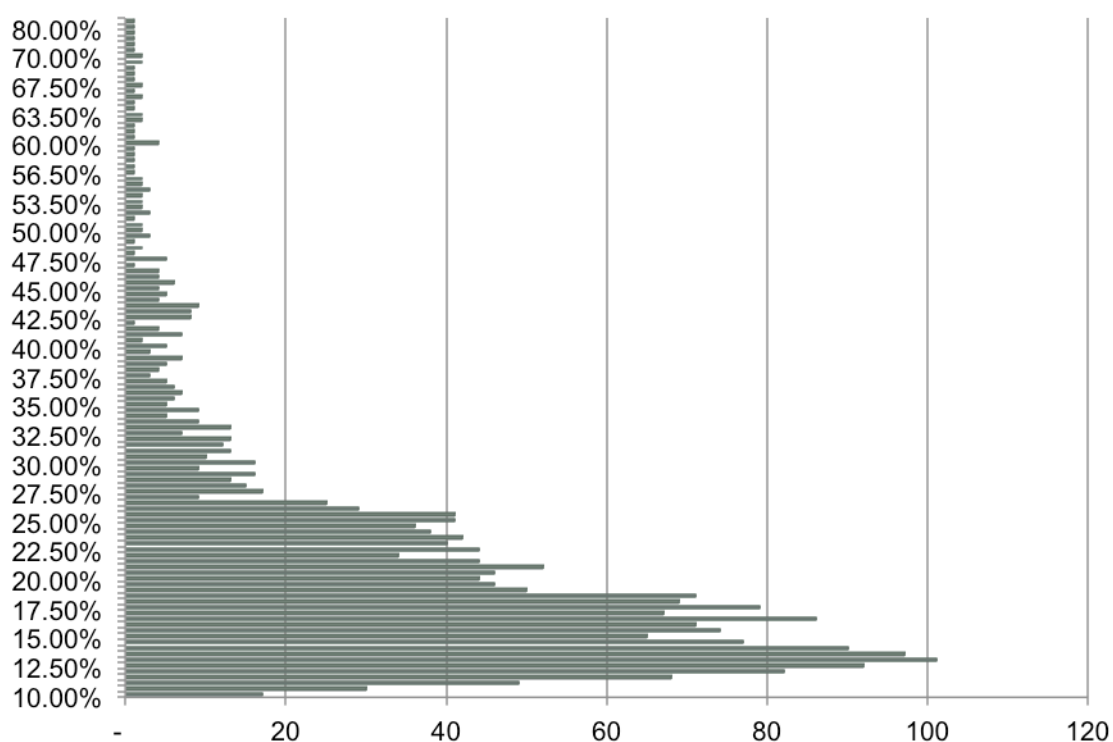
Si on analyse les volatilités dans l'ensemble de la période, on constate que l'indice VIX se situe en moyenne à 20.76%. Les corrélations entre l'indice et les volatilités implicites se situent entre 0.89 et 0.99. Les écart-types restent relativement élevés, entre 8.9% et 9.7%.

Tableau 10 : Paramètres des volatilités en général

03.01.06 - 16.03.15	Volatilité historique (30 jours)	Indice VIX	Volatilité Implicite				
			100%	97.50%	95%	90%	80%
Moyenne	17.34%	20.76%	18.03%	19.99%	22.08%	26.34%	30.80%
Ecart moyen avec le VIX			-2.73%	-0.77%	1.32%	5.58%	10.03%
Médiane	14.05%	17.82%	15.13%	17.19%	19.35%	23.82%	29.63%
Plus haut	85.32%	80.86%	73.11%	74.78%	76.49%	80.02%	87.37%
Plus bas	4.87%	9.89%	7.98%	10.27%	12.34%	16.65%	16.74%
Ecart type	12.39%	10.11%	9.10%	9.02%	8.90%	8.73%	9.69%
Corrélation avec VIX	-	-	0.9954	0.9966	0.9969	0.9931	0.8908

Si on observe la distribution du VIX sur toute la période, on remarque que 50% des données se trouvent en dessous de 18%.

Figure 6 : Distribution du VIX (06-15)

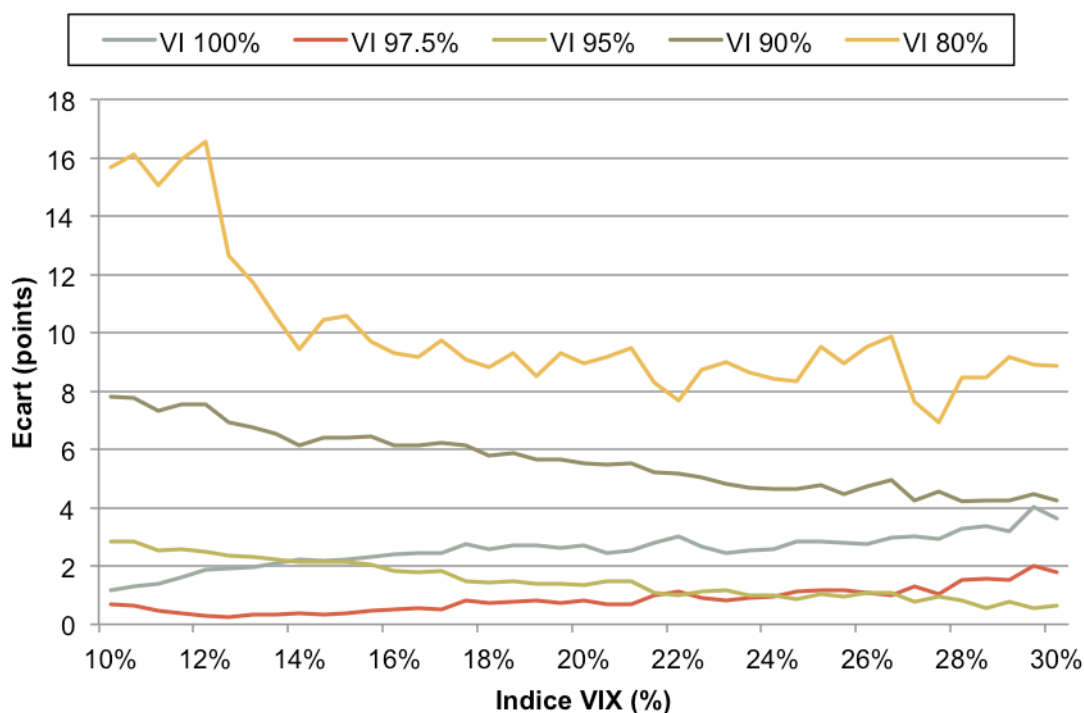


8.2.2 Analyse des écarts moyens

Comme nous l'avons observé, la volatilité implicite et l'indice VIX augmentent simultanément dû à l'augmentation des prix des options. Nous remarquons que, lorsque la volatilité augmente, les écarts entre les volatilités implicites et le VIX évoluent de manière importante.

La Figure 7 représente graphiquement les écarts absolus moyens entre l'indice VIX et la volatilité implicite de chaque prix d'exercice lorsque l'indice est inférieur à 30%.

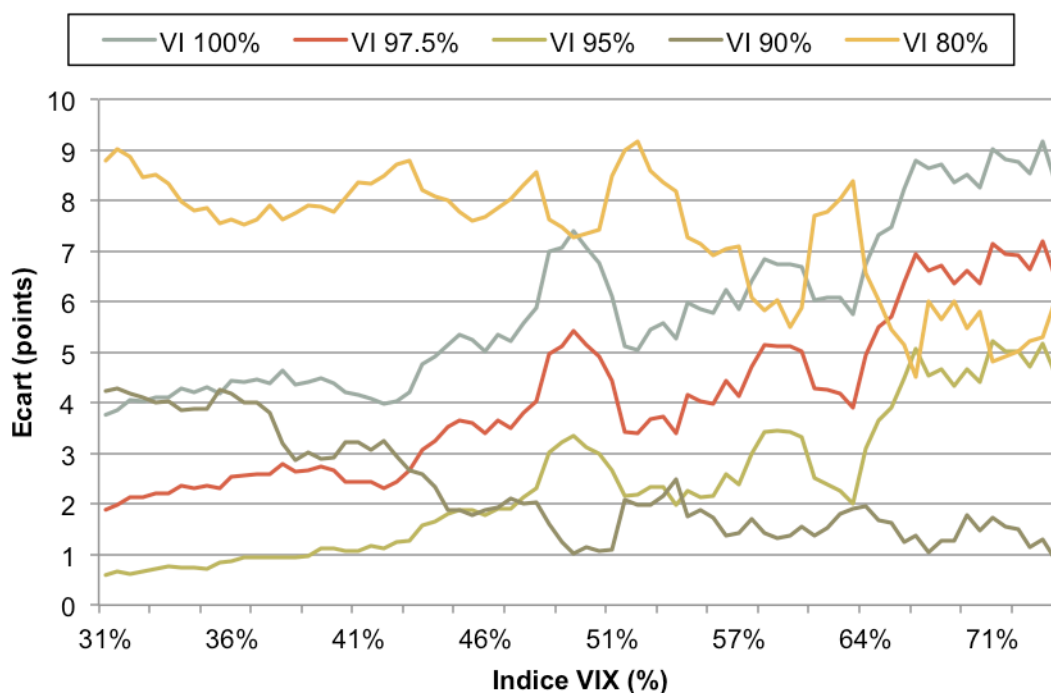
Figure 7 : Ecart absolu moyen – VIX inférieur à 30%



On constate que les volatilités implicites de strike éloigné (95%, 90%, 80%) et le VIX se rapprochent au fur et à mesure que la volatilité augmente. A l'inverse, on remarque que les VI de strike proche (100% et 97.5%) et l'indice s'éloignent l'un de l'autre

Lorsque le VIX dépasse les 30%, illustré sur Figure 8, les écarts deviennent frénétiques. Afin de rendre le graphique plus lisible et dans le but de faire émerger des tendances, nous avons dû lisser les données par une moyenne mobile de 5 valeurs.

Figure 8 : Ecart absolu moyen – VIX supérieur à 30%



Comme observé précédemment, les volatilités implicites de strike 100% et 97.5% continuent de s'écarter du VIX de manière plus importante. La VI 95% est dépassée par l'indice et s'éloignent désormais l'un de l'autre. A l'inverse, les VI 90% et VI 80% continuent de converger vers la valeur du VIX.

Le Tableau 11 récapitule l'évolution en pourcentage des écarts lorsque le VIX s'accroît. On voit que les écarts de la volatilité implicite de strike 100% et 97.5% évolue respectivement de 563% et 784% lorsque l'indice VIX atteint les 80%. Les autres volatilités évoluent dans des proportions plus faibles, notamment l'écart de la VI 90% qui diminue de -89%, et -58% pour la VI 80%.

Tableau 11 : Evolution des écarts en pourcentage

VIX		Ecart entre le VIX et la VI de strike k%									
A	B	100%		97.5%		95%		90%		80%	
		Perf. A	Perf. B	Perf. A	Perf. B	Perf. A	Perf. B	Perf. A	Perf. B	Perf. A	Perf. B
10% à 20%	10% à 20%	130.66%	130.66%	19.60%	19.60%	-53.05%	-53.05%	-29.07%	-29.07%	-42.76%	-42.76%
20% à 30%	10% à 30%	60.36%	269.89%	188.39%	244.92%	-55.76%	-79.23%	-27.95%	-48.90%	3.29%	-40.87%
30% à 40%	10% à 40%	1.49%	275.39%	0.48%	246.58%	129.06%	-52.42%	-0.84%	-49.33%	-15.56%	-50.07%
40% à 50%	10% à 50%	8.83%	308.52%	36.85%	374.30%	25.10%	-40.48%	-58.66%	-79.05%	15.30%	-42.43%
50% à 60%	10% à 60%	62.28%	562.97%	76.18%	735.62%	119.54%	30.67%	-39.34%	-87.29%	-35.21%	-62.70%
60% à 80%	10% à 80%	0.05%	563.31%	5.81%	784.21%	17.77%	53.89%	-14.90%	-89.19%	11.28%	-58.49%

Cette évolution des écarts n'est pas étonnante. En étudiant la façon dont l'indice VIX est calculé, on remarque qu'il n'est pas uniquement influencé par le prix des options, contrairement aux volatilités implicites. Les facteurs supplémentaires, c'est à dire l'écart entre prix d'exercice et l'éloignement des strikes extrêmes, conjointement avec l'effet du prix, amplifient la valeur du VIX.

En observant dans le Tableau 12 les performances journalières moyennes, on voit effectivement que les mouvements de l'indice sont plus amples. En moyenne le VIX s'accroît de 5.57% contre en moyenne 4.21% pour les volatilités implicites. A la baisse, l'indice diminue en moyenne de 4.74% contre 3.59% pour les options.

Tableau 12 : Performance journalière moyenne

	VIX	Volatilités implicites					
		100%	97.50%	95%	90%	80%	Moyenne
Positive	5.57%	5.40%	4.85%	4.35%	3.52%	2.95%	4.21%
Négative	-4.74%	-4.60%	-4.13%	-3.71%	-3.00%	-2.54%	-3.59%

Nous concluons donc que l'évolution des écarts est due au fait que le VIX est beaucoup plus sensible que les volatilités implicites individuellement, étant soumis à d'autres facteurs. De plus, l'effet du smile de volatilité restreint les volatilités implicites.

Ces résultats nous poussent à penser qu'une stratégie d'arbitrage, profitant de l'accroissement ou de la diminution de l'écart, serait imaginable. Par exemple en prenant position sur une (ou plusieurs) option du S&P500 et sur un future du VIX.

8.3 L'option ayant la volatilité implicite la plus proche du VIX selon son niveau

En observant les écarts, on remarque qu'il y a toujours une option dont la volatilité implicite est plus proche que d'autres de la valeur du VIX. Nous avons donc tenté de répliquer l'indice VIX en simulant un « produit » toujours égal à la volatilité implicite de strike K la plus semblable à l'indice.

D'après nos résultats (Annexe 2), nous voyons qu'en moyenne lorsque le VIX est :

- inférieur à 24%, l'option de strike **97.5%** est la plus proche ;
- entre 24.5% et 46.5%, l'option de strike **95%** est la plus proche ;
- au dessus de 46.5% l'option de strike **90%** est la plus proche.

Avec ces informations, nous avons créé un produit qui, chaque jour de la période considérée, est strictement égal à la volatilité implicite du strike adéquat selon nos résultats. En procédant ainsi, le produit montre une corrélation de 0.9959 et un écart moyen de 0.696 points de pourcent avec le VIX. Si nous utilisons les strike ayant la volatilité implicite effectivement la plus proche, le produit se voit posséder un écart moyen de 0.509 points de pourcent par rapport au VIX. Notre estimation présente donc une erreur de 0.187 points (0.696 - 0.509).

Tableau 13 : Paramètres du portefeuille de volatilité optimale

Paramètres	Portefeuille optimal		VIX
Corrélation	0.9958		
Ecart moyen	0.6965		
Ecart maximum	5.3789		
Ecart minimum	0.0001		
Ecart type	10.11%		10.11%
Vol. Moyenne	20.58%		20.76%
Vol. Médiane	17.19%		17.82%

Selon notre analyse, il semble possible de répliquer l'indice VIX à l'aide des options du S&P500 et ceci avec une faible marge d'erreur. Cependant, nous rappelons que nous assumons ici un produit composé de manière à avoir toujours 30 jours avant l'échéance, ainsi qu'un prix d'exercice relatif fixe (k%). Dans la réalité, étant donné qu'une option est également fonction du prix du sous-jacent ainsi que de son échéance, le produit nécessiterait un « re-balancement » continu afin de garder la même exposition à la volatilité. Bien que probablement très coûteux à cause des frais de transactions, il serait néanmoins intéressant de mesurer le coût de la mise en place d'un tel produit dans des conditions réelles.

9. Conclusion

Comme nous l'avons vu, l'indice VIX estime la volatilité implicite à l'aide d'une formule prenant en compte bien plus que le prix des options. En effet, elle tient compte également de l'écart entre strike ainsi que l'éloignement des strikes extrêmes, deux facteurs ayant une influence non négligeable dans l'indice.

De ce fait, le VIX est doté d'une vitesse de croissance bien plus importante que les volatilités de chaque prix d'exercice. D'ailleurs, l'indice surpasse consécutivement différentes volatilités lorsqu'il s'accroît. Une autre cause conjointe de ce phénomène provient du smile de volatilité provoqué par le modèle de B&S.

Ainsi, lorsque la volatilité s'accroît, l'écart entre le VIX et les volatilités implicites évoluent. Pour les strikes proche du sous-jacent, l'écart a tendance à augmenter. A l'inverse, les strikes éloignés voient leur écart diminuer.

Nos résultats nous ont également permis d'estimer quelle option réplique au mieux en moyenne la valeur de l'indice, selon le niveau de ce dernier. De cette information, nous avons pu créer un « produit » fictif dont la volatilité est égale à celle de l'option adéquate d'après notre analyse. Les résultats montrent que le produit est extrêmement proche de l'indice, avec un écart moyen sur toute la période de 0.69 points de pourcent. Cependant, la mise en place d'un tel instrument nous semble peu réaliste et très coûteux.

Pour finir, nous pensons que la relation entre le VIX et la volatilité implicite, dont l'écart évolue en fonction de la volatilité du marché, présente une opportunité suffisamment intéressante pour mener des recherches sur des stratégies d'investissements spéculatives.

Bibliographie

- AÏT-SAHALIA Yacine, JIANQING Fan et YINGYING Li, 2013. *The Leverage Effect Puzzle : Disentangling Sources of Bias at High Frequency* [PDF]. USA : Princeton University. Disponible à l'adresse : http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1960139
- BLACK, Fischer, 1976. *Studies of stock price volatility changes*. Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association. pp. 171-181.
- CBOE, 2014. *The CBOE Volatility Index - VIX* [PDF]. CBOE White Paper. Disponible à l'adresse : <http://www.cboe.com/aboutcboe/mediahub/vix-white-papers-studies.aspx>
- CBOE, 2009. *The CBOE Volatility Index - VIX* [PDF]. CBOE White Paper. Plus Disponible.
- CFE.CBOE. *How is VIX calculated ? Step-by-Step* [en ligne]. cfe.cboe.com. [Consulté le 05.06.2015]. Disponible à l'adresse : <http://cfe.cboe.com/education/vixprimer/about.aspx>
- ENGLE, Robert F., 2003. *Risk and volatility : econometric models and financial practice*. Nobel Lecture, New York University. pp. 330.
- ENGLE, Robert F., 2003b. *Risk and volatility : econometric models and financial practice*. Nobel Lecture, New York University. pp. 331.
- FIGLEWSKI Stephen, WANG Xiaozu, 2000. *Is the « Leverage Effect » a Leverage Effect ?* [PDF]. USA : New York University – Stern School of Business. Disponible à l'adresse : http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=256109
- FRENCH K. R., SCHWERT G. W. and STAMBAUGH R. F., 1987. *Expected Stock Returns and Volatility* [PDF]. Journal of Financial Economics 19 (1987) 3-29 North Holland. Disponible à l'adresse : <http://schwert.ssb.rochester.edu/fss.pdf>
- HASANHODZIC Jasmina, ANDREW W. Lo, 2011. *Black's Leverage Effect Is Not Due To Leverage* [PDF]. USA : Boston University. Disponible à l'adresse : http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1762363
- HULL, John C., 2012. Volatility Smiles. In : *Options, Futures, and other derivatives*. 8th Edition. Pearson. pp. 414-416. ISBN 978-0-13-216494-8
- RUBINSTEIN, Mark, 1994. *Implied Binomial Trees* [PDF]. Journal of Finance July 1994. pp. 6. Disponible à l'adresse : <http://www.haas.berkeley.edu/groups/finance/WP/rpf232.pdf>
- Volatility. *Investopedia.com* [en ligne]. [Consulté le 05.06.2015]. Disponible à l'adresse : <http://www.investopedia.com/terms/v/volatility.asp>
- Ways to estimate volatility : Historical Volatility. *IVolatility.com* [en ligne]. [Consulté le 05.06.2015]. Disponible à l'adresse : <http://www.ivolatility.com/help/2.html>
- Ways to estimate volatility : Implied Volatility. *IVolatility.com* [en ligne]. [Consulté le 05.06.2015]. Disponible à l'adresse : <http://www.ivolatility.com/help/4.html>

Annexe 1 : Chaînes d'options du VIX

Source : CBOE.com
 Date : 04.08.15
 Expiration : 21.08.15 (17 jours)
 SPX \$2093.32
 Risk free rate 0.05%

Source : CBOE VIX white paper 2009
 Date : ~ 10-12.2008
 Expiration : 9 jours
 SPX ~ \$920
 Risk free rate 0.38%

04.08.15 - Near-term option chain (VIX 13%)						
Strike		Mid-quote price		put/call absolute price difference	ΔK	Contribution by strike (variance)
		Call	Put			
1770	85%	329.85	0.13	329.73	5	0.0000002
1775	85%	324.85	0.13	324.73	5	0.0000002
1780	85%	319.85	0.13	319.73	5	0.0000002
1785	85%	314.85	0.13	314.73	5	0.0000002
1790	86%	309.85	0.15	309.70	5	0.0000002
1795	86%	304.85	0.15	304.70	5	0.0000002
1800	86%	299.85	0.15	299.70	5	0.0000002
1805	86%	294.85	0.15	294.70	5	0.0000002
1810	86%	289.85	0.15	289.70	5	0.0000002
1815	87%	284.85	0.15	284.70	5	0.0000002
1820	87%	279.85	0.13	279.73	5	0.0000002
1825	87%	274.85	0.15	274.70	5	0.0000002
1830	87%	269.85	0.20	269.65	5	0.0000003
1835	88%	264.85	0.20	264.65	5	0.0000003
1840	88%	259.90	0.20	259.70	5	0.0000003
1845	88%	254.95	0.23	254.73	5	0.0000003
1850	88%	249.95	0.23	249.73	5	0.0000003
1855	89%	244.95	0.23	244.73	5	0.0000003
1860	89%	239.95	0.25	239.70	5	0.0000004
1865	89%	234.95	0.25	234.70	5	0.0000004
1870	89%	230.00	0.28	229.73	5	0.0000004
1875	90%	225.05	0.28	224.78	5	0.0000004
1880	90%	220.05	0.30	219.75	5	0.0000004
1885	90%	215.05	0.33	214.73	5	0.0000005
1890	90%	210.10	0.33	209.78	5	0.0000005
1895	91%	205.15	0.38	204.78	5	0.0000005
1900	91%	200.15	0.38	199.78	5	0.0000005
1905	91%	195.15	0.40	194.75	5	0.0000006
1910	91%	190.25	0.43	189.83	5	0.0000006
1915	91%	185.25	0.45	184.80	5	0.0000006
1920	92%	180.25	0.48	179.78	5	0.0000006
1925	92%	175.35	0.53	174.83	5	0.0000007
1930	92%	170.35	0.55	169.80	5	0.0000007
1935	92%	165.45	0.58	164.88	5	0.0000008
1940	93%	160.45	0.65	159.80	5	0.0000009
1945	93%	155.55	0.68	154.88	5	0.0000009
1950	93%	150.55	0.73	149.83	5	0.0000010
1955	93%	145.65	0.80	144.85	5	0.0000010
1960	94%	140.75	0.88	139.88	5	0.0000011
1965	94%	135.80	0.95	134.85	5	0.0000012
1970	94%	130.90	1.03	129.88	5	0.0000013
1975	94%	126.00	1.13	124.88	5	0.0000014
1980	95%	121.10	1.25	119.85	5	0.0000016
1985	95%	116.20	1.38	114.83	5	0.0000017
1990	95%	111.35	1.48	109.88	5	0.0000019
1995	95%	106.50	1.65	104.85	5	0.0000021
2000	96%	101.70	1.83	99.88	5	0.0000023
2005	96%	96.90	2.10	94.80	5	0.0000026
2010	96%	92.10	2.33	89.78	5	0.0000029
2015	96%	87.35	2.50	84.85	5	0.0000031
2020	96%	82.65	2.90	79.75	5	0.0000036
2025	97%	77.95	3.20	74.75	5	0.0000039
2030	97%	73.35	3.50	69.85	5	0.0000042
2035	97%	68.80	4.00	64.80	5	0.0000048
2040	97%	64.30	4.50	59.80	5	0.0000054
2045	98%	59.80	5.05	54.75	5	0.0000060
2050	98%	55.45	5.65	49.80	5	0.0000067
2055	98%	51.15	6.45	44.70	5	0.0000076
2060	98%	46.95	7.20	39.75	5	0.0000085
2065	99%	42.85	8.10	34.75	5	0.0000095
2070	99%	38.85	9.05	29.80	5	0.0000106
2075	99%	34.90	10.15	24.75	5	0.0000118
2080	99%	31.00	11.40	19.60	5	0.0000132
2085	100%	27.40	12.70	14.70	5	0.0000146
2090	100%	23.45	14.25	9.20	5	0.0000163
2095	100%	20.55	15.85	4.70	5	0.0000181
2100	100%	17.15	17.70	0.55	5	0.0000198
2105	101%	14.40	19.85	5.45	5	0.0000163

~10-12.2008 - Near-term option chain (VIX 61.2%)						
Strike		Mid-quote price		put/call absolute price difference	ΔK	Contribution by strike (variance)
		Call	Put			
400	43%	520.45	0.13	520.33	25	0.0000196
425	46%	496.10	0.13	495.98	25	0.0000174
450	49%	470.50	0.13	470.38	23	0.0000139
470	51%	450.50	0.15	450.35	13	0.0000085
475	52%	445.50	0.15	445.35	5	0.0000033
480	52%	440.50	0.18	440.33	8	0.0000057
490	53%	430.50	0.43	430.08	10	0.0000178
500	54%	420.50	0.18	420.33	10	0.0000070
510	55%	410.55	0.23	410.33	10	0.0000087
520	57%	400.55	0.40	400.15	8	0.0000111
525	57%	395.55	0.43	395.13	5	0.0000077
530	58%	391.20	0.43	390.78	8	0.0000114
540	59%	380.60	0.40	380.20	10	0.0000138
550	60%	370.60	0.15	370.45	10	0.0000050
560	61%	360.65	0.38	360.28	10	0.0000120
570	62%	350.65	0.40	350.25	8	0.0000093
575	63%	345.70	0.23	345.48	5	0.0000034
580	63%	340.70	0.43	340.28	5	0.0000063
585	64%	335.85	0.43	335.43	5	0.0000062
590	64%	330.75	0.40	330.35	5	0.0000058
595	65%	326.25	0.25	326.00	5	0.0000035
600	65%	320.80	0.38	320.43	5	0.0000052
605	66%	315.95	0.45	315.50	5	0.0000062
610	66%	310.85	0.45	310.40	5	0.0000061
615	67%	305.90	0.48	305.43	5	0.0000063
620	67%	300.95	0.48	300.48	5	0.0000062
625	68%	296.45	0.65	295.80	5	0.0000084
630	68%	291.00	0.50	290.50	5	0.0000063
635	69%	286.05	0.53	285.53	5	0.0000065
640	70%	281.10	0.68	280.43	5	0.0000083
645	70%	276.15	0.60	275.55	5	0.0000072
650	71%	271.35	0.80	270.55	5	0.0000095
655	71%	266.30	0.73	265.58	5	0.0000085
660	72%	261.35	0.80	260.55	5	0.0000092
665	72%	256.55	0.75	255.80	5	0.0000085
670	73%	251.50	0.93	250.58	5	0.0000103
675	73%	246.60	1.00	245.60	5	0.0000110
680	74%	241.70	1.05	240.65	8	0.0000171
690	75%	231.90	1.28	230.63	10	0.0000269
700	76%	222.25	1.50	220.75	10	0.0000307
710	77%	212.40	1.75	210.65	10	0.0000348
720	78%	202.85	2.05	200.80	8	0.0000298
725	79%	198.05	2.50	195.55	5	0.0000239
730	79%	193.10	2.45	190.65	8	0.0000346
740	80%	183.65	2.90	180.75	10	0.0000532
750	82%	174.15	3.55	170.60	10	0.0000634
760	83%	164.60	3.93	160.68	10	0.0000682
770	84%	155.30	4.80	150.50	8	0.0000609
775	84%	150.70	4.90	145.80	5	0.0000409
780	85%	146.10	5.40	140.70	8	0.0000668
790	86%	137.35	6.20	131.15	10	0.0000997
800	87%	128.35	6.80	121.55	8	0.0000800
805	88%	123.50	7.75	115.75	5	0.0000600
810	88%	119.00	8.30	110.70	5	0.0000635
815	89%	114.70	8.90	105.80	5	0.0000673
820	89%	110.40	9.50	100.90	5	0.0000709
825	90%	106.30	10.20	96.10	5	0.0000752
830	90%	101.70	11.00	90.70	5	0.0000801
835	91%	97.80	11.75	86.05	5	0.0000846
840	91%	93.40	12.45	80.95	5	0.0000886
845	92%	89.30	13.35	75.95	5	0.0000938
850	92%	85.30	14.75	70.55	5	0.0001025
855	93%	81.30	15.50	65.80	5	0.0001064
860	93%	77.40	16.60	60.80	5	0.0001127
865	94%	73.50	17.70	55.80	5	0.0001187
870	95%	69.75	19.00	50.75	5	0.0001260
875	95%	66.20	20.20	46.00	5	0.0001324
880	96%	62.55	21.60	40.95	5	0.0001400

2110	101%	11.75	22.10	10.35	5	0.0000132	885	96%	59.10	22.85	36.25	5	0.0001464
2115	101%	9.40	24.80	15.40	5	0.0000105	890	97%	56.05	24.45	31.60	5	0.0001549
2120	101%	7.20	27.65	20.45	5	0.0000080	895	97%	52.65	26.45	26.20	5	0.0001657
2125	102%	5.45	30.80	25.35	5	0.0000060	900	98%	48.95	27.25	21.70	5	0.0001689
2130	102%	4.00	34.30	30.30	5	0.0000044	905	98%	46.15	29.75	16.40	5	0.0001823
2135	102%	2.83	38.15	35.33	5	0.0000031	910	99%	42.55	31.70	10.85	5	0.0001921
2140	102%	1.88	42.30	40.43	5	0.0000020	915	99%	40.05	33.55	6.50	5	0.0002011
2145	102%	1.30	46.60	45.30	5	0.0000014	920	100%	37.15	36.65	0.50	5	0.0002188
2150	103%	0.90	51.15	50.25	5	0.0000010	925	101%	33.30	37.70	4.40	5	0.0001953
2155	103%	0.65	55.90	55.25	5	0.0000007	930	101%	32.45	40.15	7.70	5	0.0001883
2160	103%	0.48	60.70	60.23	5	0.0000005	935	102%	28.75	42.70	13.95	5	0.0001651
2165	103%	0.38	65.60	65.23	5	0.0000004	940	102%	27.50	45.30	17.80	5	0.0001562
2170	104%	0.30	70.50	70.20	5	0.0000003	945	103%	24.00	47.95	23.95	5	0.0001349
2175	104%	0.28	75.50	75.23	5	0.0000003	950	103%	23.00	50.35	27.35	5	0.0001279
2180	104%	0.23	80.45	80.23	5	0.0000002	955	104%	19.85	53.90	34.05	5	0.0001092
2185	104%	0.20	85.40	85.20	5	0.0000002	960	104%	17.55	56.90	39.35	5	0.0000956
2190	105%	0.18	90.40	90.23	5	0.0000002	965	105%	15.95	60.00	44.05	5	0.0000860
2195	105%	0.18	95.40	95.23	5	0.0000002	970	105%	14.20	63.40	49.20	5	0.0000757
2200	105%	0.15	100.35	100.20	5	0.0000002	975	106%	13.65	66.90	53.25	5	0.0000721
2205	105%	0.15	105.30	105.15	5	0.0000002	980	107%	11.20	70.40	59.20	5	0.0000585
2210	106%	0.13	110.30	110.18	5	0.0000001	985	107%	9.95	74.10	64.15	5	0.0000515
2215	106%	0.13	115.30	115.18	5	0.0000001	990	108%	8.65	77.80	69.15	5	0.0000443
2220	106%	0.13	120.25	120.13	5	0.0000001	995	108%	7.55	81.70	74.15	5	0.0000383
2225	106%	0.13	125.25	125.13	5	0.0000001	1000	109%	7.00	85.25	78.25	5	0.0000351
Σ 0.0002745							1005	109%	5.60	89.70	84.10	5	0.0000278
							1010	110%	4.80	93.80	89.00	5	0.0000236
							1015	110%	4.10	98.25	94.15	5	0.0000200
							1020	111%	4.05	102.60	98.55	5	0.0000195
							1025	111%	3.05	107.20	104.15	5	0.0000146
							1030	112%	2.55	111.25	108.70	5	0.0000121
							1035	113%	2.15	116.35	114.20	5	0.0000101
							1040	113%	1.88	121.00	119.13	5	0.0000087
							1045	114%	1.48	125.70	124.23	5	0.0000068
							1050	114%	1.55	130.45	128.90	5	0.0000071
							1055	115%	1.03	135.25	134.23	5	0.0000046
							1060	115%	1.15	140.10	138.95	5	0.0000051
							1065	116%	0.73	144.95	144.23	5	0.0000032
							1070	116%	0.65	149.80	149.15	5	0.0000028
							1075	117%	0.75	154.70	153.95	5	0.0000033
							1080	117%	0.68	159.65	158.98	5	0.0000029
							1085	118%	0.55	164.55	164.00	5	0.0000023
							1090	118%	0.58	169.50	168.93	5	0.0000024
							1095	119%	0.48	174.45	173.98	5	0.0000020
							1100	120%	0.38	179.40	179.03	5	0.0000016
							1105	120%	0.48	184.35	183.88	5	0.0000020
							1110	121%	0.28	189.30	189.03	5	0.0000011
							1115	121%	0.43	194.30	193.88	5	0.0000017
							1120	122%	0.28	199.30	199.03	5	0.0000011
							1125	122%	0.33	204.25	203.93	5	0.0000013
							1130	123%	0.48	209.20	208.73	5	0.0000019
							1135	123%	0.48	214.20	213.73	5	0.0000019
							1140	124%	0.38	219.20	218.83	5	0.0000014
							1145	124%	0.50	224.20	223.70	5	0.0000019
							1150	125%	0.20	229.20	229.00	5	0.0000008
							1155	126%	0.50	234.20	233.70	5	0.0000019
							1160	126%	0.28	239.20	238.93	5	0.0000010
							1165	127%	0.20	244.20	244.00	5	0.0000007
							1170	127%	0.25	249.15	248.90	5	0.0000009
							1175	128%	0.10	254.15	254.05	5	0.0000004
							1180	128%	0.43	259.15	258.73	5	0.0000015
							1185	129%	0.15	263.50	263.35	5	0.0000005
							1190	129%	0.28	269.10	268.83	5	0.0000010
							1195	130%	0.53	274.10	273.58	5	0.0000018
							1200	130%	0.10	279.10	279.00	5	0.0000003
							1205	131%	0.53	284.10	283.58	5	0.0000018
							1210	132%	0.28	289.10	288.83	5	0.0000009
							1215	132%	0.28	294.10	293.83	5	0.0000009
							1220	133%	0.53	299.10	298.58	5	0.0000018
							Σ 0.0058504						

Annexe 2 : Ecart absolu moyen (intervalle 0.5%)

Nb. obs.	Interval (VIX)] x ; y]		VIX		Volatilité implicite (VI) moyenne par k					Ecart absolu moyen (en points de %)				
			moyen	arrondi	100%	97.50%	95%	90%	80%	100%	97.50%	95%	90%	80%
17	9.75%	10.25%	10.10%	10.00%	8.93%	10.78%	12.93%	17.91%	25.77%	1.17	0.69	2.84	7.81	15.68
30	10.25%	10.75%	10.53%	10.50%	9.21%	11.17%	13.35%	18.31%	26.65%	1.31	0.64	2.83	7.79	16.13
49	10.75%	11.25%	11.02%	11.00%	9.65%	11.47%	13.56%	18.34%	26.07%	1.37	0.46	2.54	7.31	15.05
68	11.25%	11.75%	11.51%	11.50%	9.92%	11.89%	14.09%	19.08%	27.49%	1.59	0.39	2.58	7.57	15.97
82	11.75%	12.25%	12.00%	12.00%	10.14%	12.22%	14.50%	19.54%	28.59%	1.86	0.29	2.50	7.54	16.59
92	12.25%	12.75%	12.49%	12.50%	10.56%	12.59%	14.85%	19.44%	25.14%	1.93	0.25	2.36	6.95	12.65
101	12.75%	13.25%	12.99%	13.00%	11.01%	13.05%	15.32%	19.75%	24.73%	1.98	0.35	2.33	6.76	11.74
97	13.25%	13.75%	13.47%	13.50%	11.36%	13.43%	15.70%	20.01%	24.00%	2.11	0.36	2.23	6.54	10.53
90	13.75%	14.25%	14.00%	14.00%	11.76%	13.85%	16.12%	20.12%	23.45%	2.24	0.39	2.12	6.12	9.45
77	14.25%	14.75%	14.49%	14.50%	12.33%	14.41%	16.65%	20.89%	24.93%	2.17	0.35	2.15	6.40	10.44
65	14.75%	15.25%	15.01%	15.00%	12.77%	14.91%	17.16%	21.42%	25.59%	2.25	0.37	2.14	6.41	10.58
74	15.25%	15.75%	15.50%	15.50%	13.20%	15.29%	17.54%	21.94%	25.21%	2.30	0.47	2.03	6.44	9.70
71	15.75%	16.25%	15.99%	16.00%	13.57%	15.63%	17.83%	22.12%	25.29%	2.42	0.53	1.84	6.13	9.30
86	16.25%	16.75%	16.51%	16.50%	14.07%	16.10%	18.28%	22.66%	25.67%	2.44	0.57	1.78	6.15	9.17
67	16.75%	17.25%	17.00%	17.00%	14.56%	16.64%	18.84%	23.24%	26.73%	2.44	0.53	1.84	6.24	9.73
79	17.25%	17.75%	17.50%	17.50%	14.73%	16.76%	18.98%	23.63%	26.57%	2.76	0.80	1.48	6.13	9.07
69	17.75%	18.25%	17.98%	18.00%	15.39%	17.32%	19.42%	23.76%	26.80%	2.59	0.75	1.44	5.79	8.82
71	18.25%	18.75%	18.48%	18.50%	15.77%	17.79%	19.96%	24.36%	27.78%	2.71	0.78	1.47	5.88	9.29
50	18.75%	19.25%	18.98%	19.00%	16.28%	18.25%	20.35%	24.62%	27.51%	2.69	0.83	1.38	5.64	8.54
46	19.25%	19.75%	19.49%	19.50%	16.85%	18.82%	20.90%	25.15%	28.82%	2.65	0.74	1.41	5.66	9.33
44	19.75%	20.25%	20.02%	20.00%	17.32%	19.28%	21.35%	25.56%	28.99%	2.69	0.82	1.33	5.54	8.97
46	20.25%	20.75%	20.54%	20.50%	18.08%	20.00%	22.01%	26.01%	29.73%	2.46	0.67	1.48	5.48	9.20
52	20.75%	21.25%	21.03%	21.00%	18.51%	20.48%	22.50%	26.56%	30.53%	2.52	0.70	1.47	5.53	9.50
44	21.25%	21.75%	21.52%	21.50%	18.73%	20.59%	22.59%	26.74%	29.81%	2.79	1.00	1.09	5.22	8.29
34	21.75%	22.25%	22.02%	22.00%	19.00%	20.91%	22.95%	27.20%	29.70%	3.02	1.15	0.98	5.18	7.68
44	22.25%	22.75%	22.52%	22.50%	19.84%	21.69%	23.62%	27.56%	31.24%	2.68	0.93	1.14	5.04	8.72
40	22.75%	23.25%	23.00%	23.00%	20.54%	22.27%	24.09%	27.82%	32.01%	2.46	0.84	1.16	4.82	9.01
42	23.25%	23.75%	23.51%	23.50%	20.95%	22.70%	24.51%	28.19%	32.15%	2.56	0.90	1.01	4.68	8.64
38	23.75%	24.25%	24.00%	24.00%	21.39%	23.15%	24.96%	28.64%	32.44%	2.60	0.94	1.02	4.64	8.44
36	24.25%	24.75%	24.47%	24.50%	21.64%	23.44%	25.29%	29.12%	32.83%	2.83	1.12	0.88	4.64	8.36
41	24.75%	25.25%	24.97%	25.00%	22.13%	23.93%	25.81%	29.75%	34.50%	2.84	1.15	1.05	4.77	9.52
41	25.25%	25.75%	25.53%	25.50%	22.74%	24.46%	26.27%	29.99%	34.47%	2.79	1.18	0.95	4.46	8.94
29	25.75%	26.25%	26.02%	26.00%	23.25%	25.05%	26.92%	30.73%	35.53%	2.77	1.10	1.07	4.71	9.51
25	26.25%	26.75%	26.42%	26.50%	23.44%	25.47%	27.47%	31.36%	36.30%	2.98	1.00	1.09	4.94	9.88
9	26.75%	27.25%	27.02%	27.00%	24.02%	25.78%	27.60%	31.28%	34.66%	3.00	1.32	0.78	4.26	7.64
17	27.25%	27.75%	27.49%	27.50%	24.56%	26.47%	28.38%	32.05%	34.42%	2.93	1.06	0.97	4.56	6.93
15	27.75%	28.25%	27.99%	28.00%	24.73%	26.51%	28.37%	32.22%	36.47%	3.27	1.51	0.84	4.22	8.48
13	28.25%	28.75%	28.47%	28.50%	25.10%	26.92%	28.82%	32.72%	36.95%	3.37	1.55	0.57	4.25	8.48
16	28.75%	29.25%	28.96%	29.00%	25.76%	27.50%	29.33%	33.20%	38.14%	3.19	1.52	0.78	4.25	9.18
9	29.25%	29.75%	29.54%	29.50%	25.51%	27.53%	29.64%	34.01%	38.46%	4.03	2.01	0.54	4.47	8.93
16	29.75%	30.25%	29.99%	30.00%	25.67%	27.62%	29.68%	33.98%	39.26%	4.32	2.37	0.59	3.99	9.27
10	30.25%	30.75%	30.59%	30.50%	26.66%	28.61%	30.62%	34.75%	38.70%	3.92	1.98	0.50	4.16	8.12
13	30.75%	31.25%	31.03%	31.00%	27.26%	29.26%	31.33%	35.54%	40.71%	3.77	1.97	0.85	4.52	9.69
12	31.25%	31.75%	31.49%	31.50%	27.23%	29.11%	31.08%	35.22%	39.85%	4.26	2.39	0.58	3.73	8.36
13	31.75%	32.25%	32.02%	32.00%	28.12%	30.06%	32.06%	36.14%	38.94%	3.90	2.00	0.78	4.12	6.92

Nb. obs.	Interval (VIX)] x ; y]		VIX		Volatilité implicite (VI) moyenne par k					Ecart absolu moyen (en points de %)				
			moyen	arrondi	100%	97.50%	95%	90%	80%	100%	97.50%	95%	90%	80%
7	32.25%	32.75%	32.55%	32.50%	27.85%	29.78%	31.81%	36.11%	42.00%	4.70	2.78	0.83	3.56	9.44
13	32.75%	33.25%	32.91%	33.00%	29.01%	30.97%	33.01%	37.18%	40.21%	3.90	1.96	0.78	4.27	7.30
9	33.25%	33.75%	33.52%	33.50%	28.87%	30.82%	32.86%	37.13%	41.37%	4.65	2.70	0.75	3.61	7.85
5	33.75%	34.25%	33.96%	34.00%	30.06%	31.89%	33.81%	37.82%	41.43%	3.90	2.07	0.53	3.86	7.47
9	34.25%	34.75%	34.53%	34.50%	30.17%	32.20%	34.30%	38.61%	41.76%	4.36	2.33	0.63	4.08	7.24
5	34.75%	35.25%	34.96%	35.00%	30.90%	33.19%	35.57%	40.42%	42.84%	4.06	2.53	1.51	5.46	7.88
6	35.25%	35.75%	35.49%	35.50%	30.26%	32.43%	34.70%	39.41%	43.19%	5.23	3.06	0.97	3.92	7.70
7	35.75%	36.25%	36.07%	36.00%	31.53%	33.25%	35.05%	38.85%	43.47%	4.54	2.83	1.04	2.77	7.40
6	36.25%	36.75%	36.42%	36.50%	32.32%	34.20%	36.16%	40.25%	44.41%	4.10	2.22	0.58	3.84	8.00
5	36.75%	37.25%	37.00%	37.00%	32.96%	34.62%	36.36%	40.05%	45.62%	4.04	2.38	0.64	3.04	8.62
3	37.25%	37.75%	37.57%	37.50%	32.27%	34.12%	36.03%	40.01%	43.99%	5.30	3.44	1.54	2.44	6.43
4	37.75%	38.25%	37.92%	38.00%	34.12%	35.53%	37.01%	40.17%	46.33%	3.80	2.39	0.96	2.25	8.41
5	38.25%	38.75%	38.46%	38.50%	33.62%	35.61%	37.69%	42.04%	46.60%	4.84	2.85	1.16	3.58	8.14
7	38.75%	39.25%	39.02%	39.00%	34.56%	36.36%	38.25%	42.22%	46.83%	4.46	2.66	1.29	3.19	7.80
3	39.25%	39.75%	39.58%	39.50%	36.07%	37.63%	39.26%	42.76%	47.68%	3.51	1.96	0.63	3.18	8.10
5	39.75%	40.25%	39.95%	40.00%	35.56%	37.56%	39.63%	43.90%	47.77%	4.38	2.38	1.35	3.96	7.83
2	40.25%	40.75%	40.38%	40.50%	36.75%	38.02%	39.40%	42.53%	50.38%	3.62	2.36	0.98	2.16	10.00
7	40.75%	41.25%	40.97%	41.00%	36.49%	38.20%	39.99%	43.78%	48.99%	4.48	2.88	1.63	2.81	8.02
4	41.25%	41.75%	41.37%	41.50%	37.44%	39.38%	41.38%	45.51%	49.89%	3.93	1.99	1.00	4.14	8.52
1	41.75%	42.25%	42.04%	42.00%	38.32%	39.50%	40.80%	43.76%	51.29%	3.72	2.54	1.24	1.72	9.25
8	42.25%	42.75%	42.43%	42.50%	37.09%	38.93%	40.87%	44.97%	50.61%	5.34	3.50	1.56	2.54	8.18
8	42.75%	43.25%	43.00%	43.00%	36.68%	38.58%	40.57%	44.71%	50.06%	6.32	4.41	2.43	1.72	7.06
9	43.25%	43.75%	43.53%	43.50%	38.20%	39.78%	41.45%	45.05%	50.91%	5.34	3.76	2.08	1.52	7.38
4	43.75%	44.25%	44.03%	44.00%	39.02%	40.61%	42.30%	45.91%	52.24%	5.01	3.41	1.73	1.88	8.22
5	44.25%	44.75%	44.56%	44.50%	39.79%	41.32%	42.92%	46.29%	52.63%	4.76	3.24	1.64	1.73	8.07
4	44.75%	45.25%	44.98%	45.00%	40.12%	41.74%	43.43%	47.02%	52.30%	4.86	3.24	1.55	2.04	7.31
6	45.25%	45.75%	45.49%	45.50%	40.34%	42.08%	43.90%	47.67%	52.94%	5.15	3.41	1.85	2.18	7.44
4	45.75%	46.25%	45.91%	46.00%	38.89%	40.95%	43.12%	47.70%	54.11%	7.02	4.95	2.79	1.80	8.21
4	46.25%	46.75%	46.54%	46.50%	42.18%	43.86%	45.63%	49.36%	55.70%	4.36	2.68	1.67	2.82	9.16
1	46.75%	47.25%	47.08%	47.00%	40.53%	42.32%	44.22%	48.33%	56.54%	6.55	4.76	2.86	1.25	9.46
5	47.25%	47.75%	47.44%	47.50%	41.16%	43.07%	45.06%	49.26%	56.04%	6.28	4.37	2.38	2.08	8.61
1	47.75%	48.25%	48.00%	48.00%	37.24%	39.90%	42.60%	48.00%	50.67%	10.76	8.10	5.40	0.00	2.67
2	48.25%	48.75%	48.56%	48.50%	41.17%	42.90%	44.74%	48.66%	56.01%	7.39	5.66	3.82	0.10	7.45
1	48.75%	49.25%	49.14%	49.00%	43.06%	44.90%	46.81%	50.86%	57.31%	6.08	4.24	2.33	1.72	8.17
3	49.25%	49.75%	49.44%	49.50%	44.59%	46.12%	47.74%	51.28%	59.25%	4.84	3.32	1.69	1.84	9.82
2	49.75%	50.25%	50.01%	50.00%	45.23%	46.74%	48.32%	51.64%	59.03%	4.77	3.26	1.69	1.64	9.03
2	50.75%	51.25%	50.97%	51.00%	43.48%	45.24%	47.11%	51.12%	58.96%	7.49	5.72	3.85	0.15	7.99
1	51.75%	52.25%	52.05%	52.00%	49.64%	51.46%	53.32%	57.11%	62.02%	2.41	0.59	1.27	5.06	9.97
3	52.25%	52.75%	52.55%	52.50%	46.86%	48.49%	50.18%	53.74%	61.56%	5.68	4.06	2.36	1.20	9.01
2	52.75%	53.25%	53.04%	53.00%	46.19%	48.32%	50.49%	54.95%	60.01%	6.85	4.72	2.55	1.91	6.97
2	53.25%	53.75%	53.68%	53.50%	48.19%	50.11%	52.06%	56.11%	61.61%	5.49	3.57	1.62	2.43	7.93
2	54.25%	54.75%	54.42%	54.50%	48.48%	50.35%	52.26%	56.23%	61.50%	5.94	4.07	2.16	1.81	7.08
3	54.75%	55.25%	55.01%	55.00%	49.06%	50.68%	52.36%	55.89%	60.42%	5.96	4.33	2.66	1.44	5.41
2	55.25%	55.75%	55.51%	55.50%	50.39%	52.07%	53.78%	57.28%	63.81%	5.12	3.43	1.72	1.78	8.30
2	55.75%	56.25%	55.94%	56.00%	49.55%	51.38%	53.25%	57.09%	61.83%	6.39	4.56	2.69	1.15	5.89
1	56.25%	56.75%	56.65%	56.50%	48.91%	50.88%	52.94%	57.33%	65.18%	7.74	5.77	3.71	0.68	8.53
1	56.75%	57.25%	56.76%	57.00%	52.64%	54.12%	55.65%	58.87%	64.10%	4.12	2.64	1.11	2.11	7.34

Nb. obs.	Interval (VIX)] x ; y]		VIX		Volatilité implicite (VI) moyenne par k					Ecart absolu moyen (en points de %)				
			moyen	arrondi	100%	97.50%	95%	90%	80%	100%	97.50%	95%	90%	80%
1	57.25%	57.75%	57.53%	57.50%	48.88%	50.30%	51.74%	54.68%	57.96%	8.65	7.23	5.79	2.85	0.43
1	58.25%	58.75%	58.49%	58.50%	51.22%	52.93%	54.65%	58.16%	65.49%	7.27	5.56	3.84	0.33	7.00
1	58.75%	59.25%	58.91%	59.00%	52.92%	54.53%	56.17%	59.54%	65.81%	5.99	4.38	2.74	0.63	6.90
4	59.75%	60.25%	59.91%	60.00%	52.16%	54.16%	56.20%	60.38%	65.75%	7.74	5.75	3.71	0.99	5.85
1	60.25%	60.75%	60.72%	60.50%	56.85%	58.49%	60.18%	63.67%	69.96%	3.87	2.23	0.54	2.95	9.24
1	60.75%	61.25%	60.90%	61.00%	55.63%	57.38%	59.17%	62.87%	70.46%	5.27	3.52	1.73	1.97	9.56
1	61.25%	61.75%	61.44%	61.50%	53.91%	56.02%	58.17%	62.58%	68.78%	7.53	5.42	3.27	1.14	7.34
2	62.75%	63.25%	62.94%	63.00%	56.91%	58.87%	60.85%	64.93%	71.16%	6.03	4.07	2.09	1.99	8.22
2	63.25%	63.75%	63.66%	63.50%	57.52%	59.37%	61.27%	65.17%	71.22%	6.14	4.29	2.39	1.51	7.56
1	63.75%	64.25%	63.92%	64.00%	55.20%	56.56%	57.94%	60.78%	64.09%	8.72	7.36	5.98	3.14	0.17
1	64.25%	64.75%	64.70%	64.50%	56.51%	58.34%	60.21%	64.06%	71.53%	8.19	6.36	4.49	0.64	6.83
2	66.25%	66.75%	66.39%	66.50%	58.10%	59.94%	61.80%	65.57%	70.90%	8.28	6.44	4.59	0.82	4.51
1	66.75%	67.25%	66.96%	67.00%	57.12%	59.51%	61.95%	67.04%	73.63%	9.84	7.45	5.01	0.08	6.67
2	67.25%	67.75%	67.63%	67.50%	58.64%	60.47%	62.34%	66.21%	72.00%	8.98	7.16	5.28	2.18	4.37
1	67.75%	68.25%	67.80%	68.00%	59.83%	62.17%	64.51%	69.27%	75.43%	7.97	5.63	3.29	1.47	7.63
1	68.25%	68.75%	68.51%	68.50%	59.98%	61.61%	63.29%	66.75%	73.54%	8.53	6.90	5.22	1.76	5.03
1	68.75%	69.25%	69.15%	69.00%	62.60%	64.43%	66.28%	70.05%	75.43%	6.55	4.72	2.87	0.90	6.28
2	69.25%	69.75%	69.45%	69.50%	58.85%	60.78%	62.77%	66.94%	73.58%	10.60	8.67	6.68	2.54	4.13
2	69.75%	70.25%	69.96%	70.00%	62.22%	64.08%	66.00%	69.98%	75.93%	7.74	5.87	3.96	0.65	5.97
1	70.25%	70.75%	70.33%	70.50%	58.61%	60.74%	62.94%	67.47%	73.06%	11.72	9.59	7.39	2.86	2.73
1	72.25%	72.75%	72.67%	72.50%	65.20%	66.81%	68.46%	71.88%	78.16%	7.47	5.86	4.21	0.79	5.49
1	74.25%	74.75%	74.26%	74.50%	67.90%	69.61%	71.34%	74.94%	81.03%	6.36	4.65	2.92	0.68	6.77
1	78.75%	79.25%	79.13%	79.00%	69.75%	71.90%	74.04%	78.36%	84.26%	9.38	7.23	5.09	0.77	5.13
1	79.75%	80.25%	80.06%	80.00%	69.13%	71.43%	73.79%	78.66%	86.38%	10.93	8.63	6.27	1.40	6.32
1	80.75%	81.25%	80.86%	81.00%	73.11%	74.78%	76.49%	80.02%	87.37%	7.75	6.08	4.37	0.84	6.51

Annexe 3 : Ecart absolu moyen (intervalle 5%)

VIX] x ; y]		Ecart absolu (en points de %)					Nb. obs.
		100%	97.50%	95%	90%	80%	
Moyenne	0-15%	1.92	0.37	2.36	6.89	12.66	733
	15-20%	2.54	0.66	1.64	5.99	9.26	668
	20-25%	2.66	0.91	1.15	5.06	8.76	424
	25-30%	3.05	1.29	0.92	4.54	8.91	200
	30-35%	4.17	2.25	0.70	4.03	8.17	101
	35-40%	4.38	2.62	1.06	3.37	7.79	52
	40-45%	5.03	3.33	1.74	2.30	8.06	53
	45-80%	6.64	4.82	3.02	1.64	7.07	86
Médiane	0-15%	1.83	0.32	2.35	7.13	14.66	
	15-20%	2.59	0.59	1.58	5.98	7.71	
	20-25%	2.78	0.85	1.15	4.99	7.85	
	25-30%	3.16	1.36	0.80	4.36	8.28	
	30-35%	4.24	2.24	0.51	3.96	7.40	
	35-40%	4.20	2.49	0.81	3.10	7.81	
	40-45%	5.04	3.52	1.74	1.95	8.14	
	45-80%	6.42	4.64	2.74	1.46	7.32	
Maximum	0-15%	3.55	1.60	3.72	9.10	22.67	
	15-20%	4.27	2.08	3.19	8.03	19.71	
	20-25%	5.53	3.51	3.28	7.99	17.87	
	25-30%	5.51	3.43	2.89	7.11	15.95	
	30-35%	6.97	4.43	3.53	7.78	14.33	
	35-40%	8.36	5.55	4.52	9.82	11.91	
	40-45%	8.24	5.98	3.76	7.61	12.00	
	45-80%	12.39	10.64	8.83	5.06	11.08	
Minimum	0-15%	0.26	0.00	1.19	3.79	3.79	
	15-20%	0.56	0.00	0.16	3.59	3.96	
	20-25%	0.51	0.00	0.01	2.91	3.55	
	25-30%	0.73	0.01	0.00	2.28	4.05	
	30-35%	0.98	0.17	0.00	1.88	3.35	
	35-40%	0.66	0.68	0.05	1.14	3.59	
	40-45%	1.47	0.40	0.06	0.51	3.65	
	45-80%	1.48	0.01	0.06	0.00	0.17	
Ecart-type	0-15%	0.56	0.27	0.45	1.14	5.62	
	15-20%	0.66	0.45	0.59	0.88	4.14	
	20-25%	0.90	0.67	0.68	0.95	3.04	
	25-30%	1.08	0.87	0.69	0.98	2.98	
	30-35%	1.19	0.90	0.58	1.12	2.77	
	35-40%	1.64	1.19	0.84	1.47	2.04	
	40-45%	1.45	1.22	0.84	1.49	1.56	
	45-80%	2.12	1.96	1.69	1.11	2.25	